Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет №1.

1. Модели, описываемые одним дифференциальным уравнением. Понятие стационарного состояния. Устойчивость.

2. Цепочка химических превращений описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy - k_2 y \end{cases}$$

Нарисуйте соответствующую схему химических реакций. Проведите параметрический анализ системы и постройте фазопараметрическую диаграмму (зависимость типа стационарного состояния от параметра). Нарисуйте эскизы фазового портрета.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 2.

1. Модели роста популяций. Экспоненциальный рост. Логистический рост. Модель с наименьшей критической численностью.

2. Определите тип стационарного состояния системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = a(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

в зависимости от значения параметра a ($-\infty < a < +\infty$). Укажите интервал значений параметра, при котором в системе возможны автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 3.

1. Параметрическое исследование систем линейных дифференциальных уравнений. Понятие фазопараметрической диаграммы. Бифуркация. Точка бифуркации. Бифуркационное значение параметра. Понятие бифуркационной диаграммы.

2. Пусть динамика популяции описывается уравнением, учитывающим нижнюю границу численности и внутривидовую конкуренцию:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2(a+2)}{a+x} - x - 0.5x^2 .$$

Найдите стационарные состояния. Определите их устойчивость в зависимости от параметра для $0 < a < 2$.

При a =1 определите величины верхней (K) и нижней (L) границы численности.

Постройте графики динамики численности популяций $x(t)$ при $a = 1$
а) для начальных значений меньших нижней критической границы,
б) для начальных значений, лежащих в пределах между нижней и верхней границей,
в) для начальных значений, превышающих верхнюю границу.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 4.

1. Понятие дискретной модели. Состояние равновесия. Исследование устойчивости состояния равновесия. Построение лестницы Ламерея.

2. Модель выбора одного из равноправных видов может описываться уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay - xy. \end{cases}$$

где a – коэффициент размножения каждого из видов.
Найдите координаты особых точек. Определите тип ненулевой особой точки ($x \neq 0$, $y \neq 0$).
Постройте фазовый портрет системы вблизи ненулевой особой точки при $a = 1$:
а) постройте главные изоклины системы;
б) постройте, если необходимо, сепаратрисы;

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 5.

1. Дискретная логистическая модель. Исследование дискретного логистического уравнения, возможные варианты поведения решения в зависимости от коэффициента прироста.

2. Определите тип стационарного состояния системы в зависимости от значения параметра a ($0 < a$).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay\left(x - \dfrac{2}{1+y}\right) \end{cases}$$

Укажите интервал значений параметра, при котором в системе возможны автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 6.

1. Возрастная матрица Лесли.

2. Простейшим классическим примером существования автоколебаний в системе химических реакций является ***модель «Брюсселятор»*:**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + x^2 y - (B+1)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = Bx - x^2 y. \end{cases}$$

Найдите стационарное состояние модели. Проведите линейный анализ и исследуйте, как зависит тип стационарного состояния от параметра B.
Постройте параметрическую диаграмму, указывая типы стационарного состояния для различных значений B. Какие устойчивые и неустойчивые решения могут реализовываться в модели «Брюсселятор»? При каком значении B происходит закритическая бифуркация Андронова-Хопфа?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 7.

1. Модели, описываемые системами двух линейных автономных дифференциальных уравнений. Характеристическое уравнение. Собственные числа и собственные вектора. Типы особых точек и общий вид фазовых портретов. Бифуркационная диаграмма для системы двух линейных автономных дифференциальных уравнений.

2. Для сохранения популяции редкого вида животных в зоопарке созданы оптимальные условия ее роста, такие что изменение численности популяции можно описать следующим уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = 0.25x^2 - 2x + a = F(x).$$

где k = 0.25 – коэффициент размножения, d = 2 – коэффициент смертности, a – прирост за счет деятельности зоопарка, ($0 < a$).
Найдите стационарные состояния и определите их число в зависимости от параметра a. Определите устойчивость каждого из стационарных состояний по графику $F(x)$. Постройте фазопараметрическую диаграмму $\bar{x}(a)$. На диаграмме укажите ветви устойчивых и неустойчивых состояний. Поясните биологический смысл диаграммы.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 8.

1. Модели, описываемые системами двух линейных автономных дифференциальных уравнений. Стационарное состояние. Решение системы. Характеристические числа. Кинетический портрет решения системы.

2. Популяцию мух выращивали в идеальных условиях. Согласно наблюдениям, численность мух (N) возрастала по экспоненциальному закону. За 20 дней численность мух выросла от 100 до 739 особей. Сколько дней понадобится ученым, чтобы получить 10 000 особей, необходимых для приличной статистики и публикации в высокорейтинговом журнале?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 9.

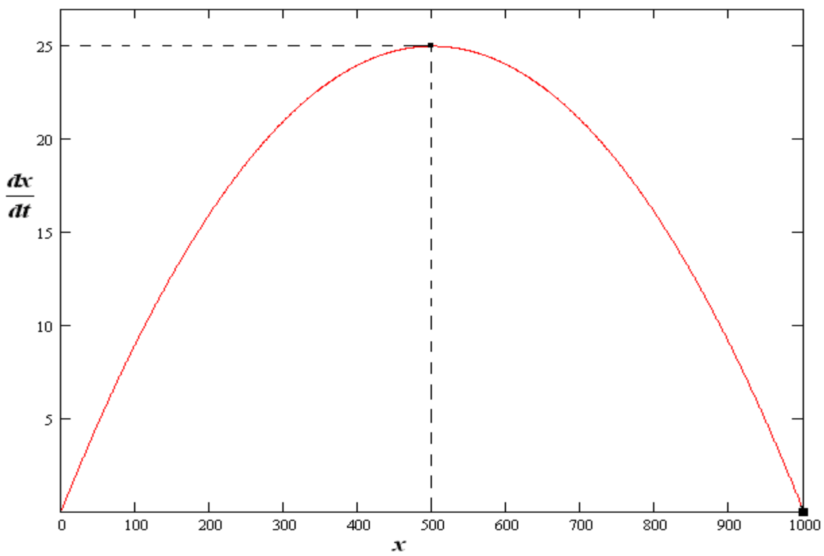
1. Построение фазовых портретов. Метод изоклин. Построение сепаратрис седла (нахождение собственных векторов). Определение направления движения изображающей точки по фазовой траектории. Построение кинетических кривых по фазовому портрету и наоборот. Пример: система линейных уравнений для химических реакций.

2. Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста.
Зависимость скорости роста от численности популяции представлена на графике.

По графику определите значения параметров логистического уравнения.

Найдите стационарные состояния и определите их устойчивость. Постройте график динамики численности популяции, если начальная численность равна а) 10; б) 400; в) 700.

Укажите численность, ниже которой кривая имеет перегиб.



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 10.

1. Исследование устойчивости стационарных состояний системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Линеаризация системы ОДУ в окрестности стационарного состояния. Пример: классическая модель «хищник - жертва» Вольтерры.

2. Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

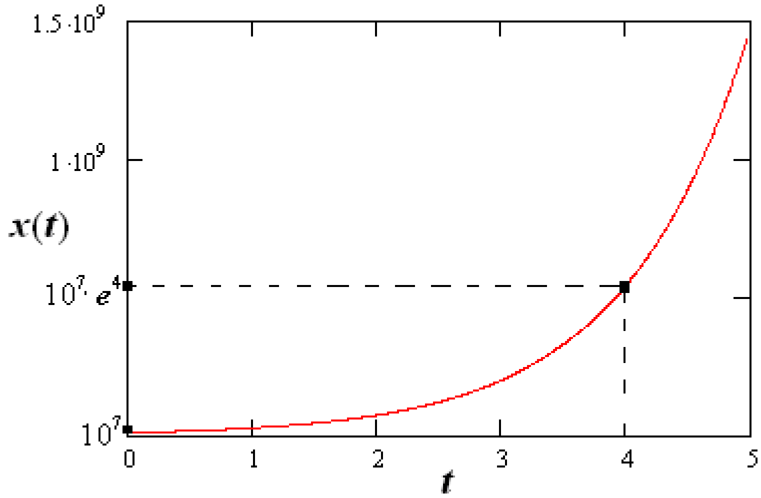
$$N_{t+1} = N_t \cdot e^{r(1-\frac{N_t}{K})}.$$

а) Найдите положения равновесия. Определите их устойчивость в зависимости от параметра r ($r > 0$).
б) Постройте эскиз кинетического портрета для данной системы при r = 1.5.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 11.

1. Исследование поведения нелинейных систем второго порядка вблизи стационарных состояний. Линеаризация в окрестности стационарного состояния. Примеры: система уравнений Лотки (химическая реакция).

2. График динамики численности популяции, рост которой описывается экспоненциальным законом, представлен на рисунке. Определите по графику параметры соответствующего дифференциального уравнения и постройте график зависимости скорости роста популяции от ее численности.

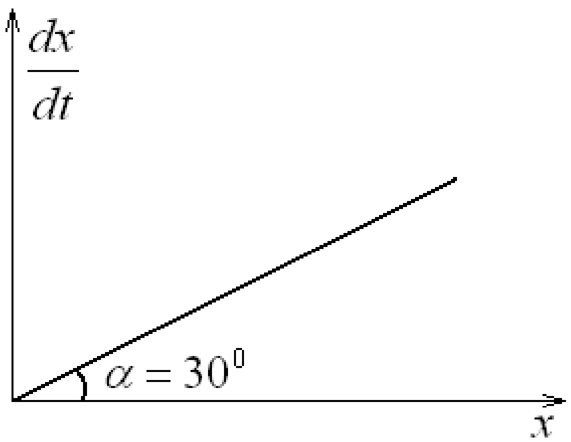


Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 12.

1. Мультистационарные системы. Триггер. Силовое и параметрическое переключение триггера. Пример: модель конкуренции двух видов (с учетом внутривидовой конкуренции).

2. График функции, задающей скорость изменения численности микробной популяции, имеет вид, изображенный на графике.

Какое выражение будет описывать динамику роста культуры, если в начальный момент времени ее размер равен 10^5 особей. В какой момент времени размер культуры увеличится на 80%?



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 13.

1. Мультистационарные системы. Триггер. Силовое и параметрическое переключение триггера. Пример: модель конкуренции двух видов (с учетом внутривидовой конкуренции).

2. В 1859 году в Австралии некий Томас Остин выпустил на волю 24 кроликов. Эти особи положили начало популяции диких кроликов. В 1950 году численность кроликов в Австралии достигла 600 миллионов. Какова удельная скорость роста численности кроликов, если предположить, что их численность подчиняется экспоненциальному закону? Сколько кроликов было бы в Австралии сейчас, если бы не были приняты меры по ограничению их численности?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 14.

1. Мультистационарные системы. Триггер. Силовое и параметрическое переключение триггера. Пример: генетический триггер Жакоба-Моно.

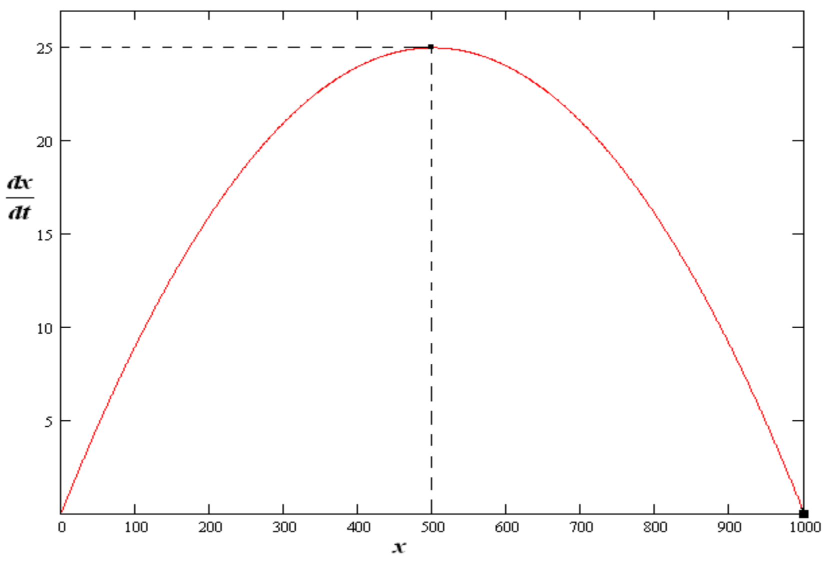
2. Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста.

Зависимость скорости роста от численности популяции представлена на графике.

По графику определите значения параметров логистического уравнения.

Найдите стационарные состояния и определите их устойчивость. Постройте график динамики численности популяции, если начальная численность равна а) 100; б) 300; в) 800.

Укажите численность, ниже которой кривая имеет перегиб.



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 15.

1. Типы пространственного поведения распределенных систем. Закон Фика. Уравнение диффузии. Система «реакция-диффузия».

2. Для борьбы с сахарно-тростниковым жуком в 1937 году в Австралии выпустили 62 000 жаб-аг. Жуки жили на верхушках растений сахарного тростника, и жабы-аги вместо того, чтобы карабкаться по стеблям, быстро нашли себе другую добычу. В настоящее время их численность в Австралии составляет 1,5 миллиарда особей. Какова удельная скорость роста численности жаб-аг, если предположить, что их численность подчиняется экспоненциальному закону $\frac{dN}{dt} = rN$? Когда их численность достигнет 2 миллиардов?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 16.

1. Иерархия времен. Принцип «узкого места». Применение теоремы Тихонова к системе ферментативных реакция Михаэлиса-Ментен, где $\varepsilon = e_0/s_0$ – малый параметр:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -s + (s + K - V)c \\ \varepsilon \frac{dc}{dt} = s - (s + K)c \end{cases}$$

2. В популяцию большого размера занесено инфекционное заболевание. Доля людей, перенесших заболевание, возрастает со временем. Пусть $x(t)$ обозначает долю людей, переболевших заболеванием за t лет после ее возникновения в популяции. Уравнение, описывающее динамику переболевших людей имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a - x}{2}.$$

Как зависит решение уравнения от параметра a?
Определите его устойчивость.
Постройте фазопараметрическую диаграмму $\bar{x}(a)$.
За сколько лет доля переболевших достигнет 90%, если $x(0) = 0$, $a = 0.5$.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 17.

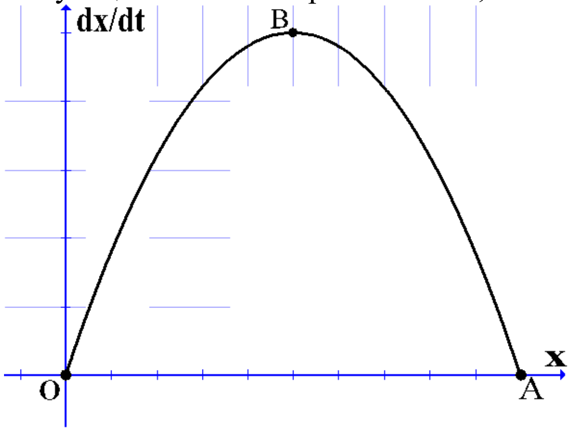
1. Колебания в биологических системах. Понятие предельного цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа. Условия существования предельного цикла в нелинейных системах. «Мягкое» и «жесткое» рождение предельного цикла на примере модельных систем.

2. В эксперименте с голоданием масса испытуемого M за 30 дней уменьшилась от 140 до 110 фунтов. Скорость потери массы, согласно наблюдениям, была пропорциональна массе испытуемого с коэффициентом r.
а) Найдите коэффициент потери массы – r.
б) Найдите массу испытуемого через 15 дней голодания.
в) Постройте график зависимости скорости dM/dt от M, используя определенную в 1-ом задании величину r.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 18.

1. Колебания в биологических системах. Понятие предельного цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа. Условия существования предельного цикла в нелинейных системах. "Мягкое" рождение предельного цикла на примере модели колебаний в гликолизе.

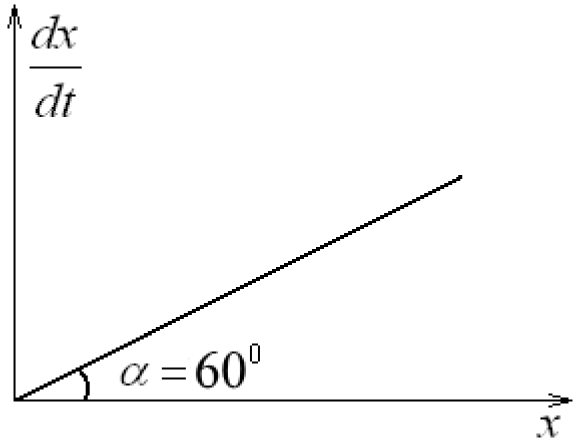
2. Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста. Зависимость скорости роста от численности популяции представлена на графике. Координаты точек: A(3000,0); B(1500, 4500).
По графику определите значения параметров логистического уравнения. Определите численность популяции в момент времени $t=1$, если начальная численность равна 10.



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 19.

1. Колебания в биологических системах. Понятие предельного цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа. Условия существования предельного цикла в нелинейных системах. "Мягкое" рождение предельного цикла на примере модели «Брюсселятор».

2. График функции, задающей скорость изменения численности микробной популяции, имеет вид:

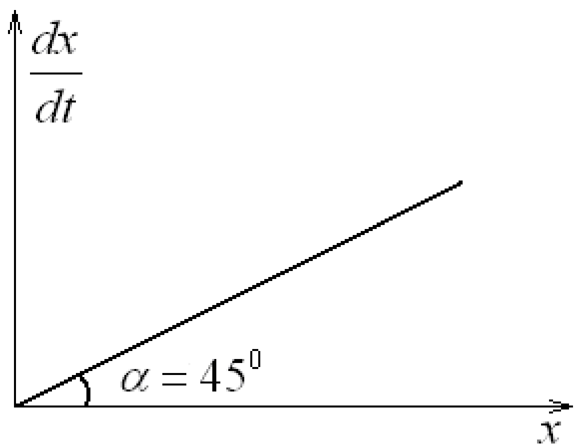


По графику определите значения параметров уравнения роста популяции. Какова будет численность культуры через 2 дня, если в начальный момент времени ее размер равен 5×10^5 особей?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 20.

1. Динамический хаос. Хаос в дискретных системах. Понятие странного аттрактора. Пример – аттрактор в системе Лоренца. Причины возникновения нерегулярности в системе Лоренца. Виды аттракторов. Понятие устойчивости траектории.

2. График функции, задающей скорость изменения численности популяции, имеет вид, изображенный на графике.



Какова будет численность популяции через 2 часа, если ее размер в начальный момент времени равен 2.

Какое выражение будет описывать динамику роста культуры, если в начальный момент времени ее размер равен 10^5 особей.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 21.

1. Модели взаимодействия популяций. Основные принципы построения моделей. Модель отбора одного из равноправных видов. Параметрическое исследование моделей.

2. Проведите исследование для следующего уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - bx + 4 \text{ (для } x > 0,\ b > 0\text{).}$$

Найдите значения параметра b, при котором
а) стационарных состояний нет;
б) есть только одно стационарное состояние;
в) есть два стационарных состояния.

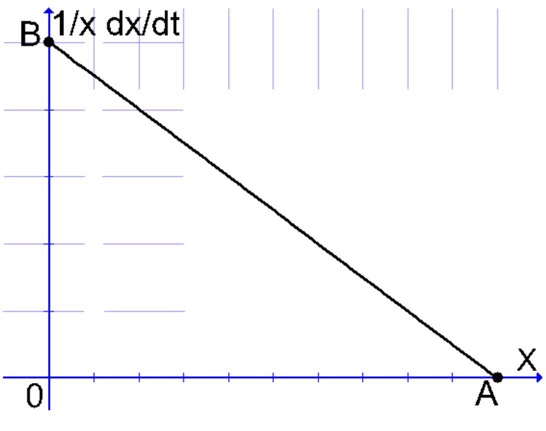
Нарисуйте фазовый портрет для приведенного уравнения и изобразите на нем движение фазовой переменной при $b = 5$ и начальном значении $x(0) = 3$.

Постройте фазопараметрическую диаграмму $\bar{x}(b)$.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 22.

1. Модели взаимодействия популяций. Основные принципы построения моделей. Модель конкуренции (с учетом внутривидовой конкуренции). Параметрическое исследование модели в зависимости от параметра межвидовой конкуренции (остальные параметры примите равными 1).

2. График **удельной** скорости роста популяции представлен на рисунке. Координаты точек: A(4000,0); B(0, 0.8). Запишите уравнение, описывающее скорость изменения численности, определив необходимые параметры из графика. Определите численность популяции в момент времени $t = 5$, если начальная численность равна 10.



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 23.

1. Модели взаимодействия популяций. Основные принципы построения моделей. Модель хищник-жертва (с учетом внутривидовой конкуренции). Параметрическое исследование модели в зависимости от параметра константы взаимодействия хищника и жертвы (остальные параметры примите равными 1).

2. В 1798 году Томас Мальтус предположил закон роста численности населения Земли: $\frac{dN}{dt} = rN$. Согласно его предположению, численность людей через 25 лет должна была удвоиться. К какому году численность населения Земли достигла бы 7 миллиардов человек, если бы закон Мальтуса действовал? Во времена Мальтуса население Земли составляло 700 тысяч человек.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 24.

1. Иерархия времен. Принцип «узкого места». Применение теоремы Тихонова к системе ферментативных реакция Михаэлиса-Ментен, где $\varepsilon = e_0/s_0$ – малый параметр:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -s + (s + K - V)c \\ \varepsilon \frac{dc}{dt} = s - (s + K)c \end{cases}$$

2. В популяцию большого размера занесено инфекционное заболевание. Доля людей, перенесших заболевание, возрастает со временем. Пусть $x(t)$ обозначает долю людей, переболевших заболеванием за t лет после ее возникновения в популяции.

Уравнение, описывающее динамику переболевших людей имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a - x}{2}.$$

Как зависит решение уравнения от параметра a?
Определите его устойчивость.
Постройте фазопараметрическую диаграмму $\bar{x}(a)$.
За сколько лет доля переболевших достигнет 90%, если $x(0) = 0$, $a = 2$.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 25.

1. Модели распространения нервного импульса: классическая модель Ходжкина-Хаксли и базовая модель Фитцхью-Нагумо. Распространение нервного импульса.

2. ***Модель гликолиза*** в безразмерном виде может иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y\left(x - \dfrac{1+r}{1+ry}\right). \end{cases}$$

Здесь x и y – безразмерные концентрации метаболитов гликолиза, фруктозы-6-фосфат (Ф6Ф) и фруктозы дифосфат (ФДФ) соответственно, r – параметр, пропорциональный скорости притока Ф6Ф в сферу реакции.
Найдите стационарное состояние модели. Проводя линейный анализ, исследуйте, как зависит тип стационарного состояния от скорости притока Ф6Ф в сферу реакции r. Постройте параметрическую диаграмму, указывая типы стационарного состояния для различных областей r. При каком значении r происходит закритическая бифуркация Андронова–Хопфа? Опишите, какие динамические режимы возникают при увеличении r от 0.5 до 1.5.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 26.

1. Основы метода молекулярной динамики. Потенциалы молекулярных взаимодействий. Принципы организации структуры белков. Моделирование белков по гомологии. Виртуальный скрининг и докинг. Разработка лекарственных веществ с использованием методов молекулярного моделирования.

2. Модель симбиоза двух видов в безразмерных переменных может быть описана системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 + 0.5y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 + 0.5x - y). \end{cases}$$

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний.
Постройте фазовый портрет системы:
а) постройте главные изоклины системы;
б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости;
в) постройте, если необходимо, сепаратрисы,
г) постройте фазовые траектории и стрелками укажите их направление.
Опишите, как будет происходить взаимодействие видов в зависимости от выбора различных начальных условий.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 27.

1. Гипотезы Вольтерра. Аналогии с химической кинетикой. Вольтерровские модели взаимодействий. Классификация типов взаимодействий. Конкуренция. Хищник-жертва. Функция хищничества (Холлинга).

2. Определите тип стационарного состояния системы в зависимости от значения параметра a ($a > 0$). Укажите интервал значений параметра, при котором в системе возможны автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a + x^2 y - 6x \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - x^2 y \end{cases}$$

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 28.

1. Обобщенные модели взаимодействия видов. Модель Колмогорова. Сравнение с классической моделью Вольтерры.

2. Постройте параметрическую диаграмму для модели Лотки в диапазоне $0 < k < 8$:

$$\begin{cases} x' = k - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

Укажите значения параметра k, при котором меняется тип стационарного состояния. Является ли это значение бифуркационным?

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 29.

1. Обобщенные модели взаимодействия видов. Модель Базыкина. Формулировка модели. Сравнение с классической моделью Вольтерры.

2. Определите тип стационарного состояния системы в зависимости от значения параметра a ($a > 0$). Укажите интервал значений параметра, при котором в системе возможны автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + x^2 y - (a+1)x \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - x^2 y \end{cases}$$

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 30.

1. Понятие агентной модели. Клеточные автоматы. Агентная модель формирования стад животных. Модель антропогенного воздействия на поведение волков в Национальном парке Канады.

2. Постройте фазопараметрическую диаграмму для модели Лотки в диапазоне $0 < k < 8$:

$$\begin{cases} x' = k - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

Для этого
а) получите выражения для стационарных значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в зависимости от параметра k;
б) рассчитайте $\bar{y}$ для нескольких значений параметра k из заданного диапазона;
в) постройте график $\bar{y}(k)$ в заданном диапазоне параметра k.
г) рассчитав корни характеристического уравнения, отметьте на диаграмме области, где решение имеет колебательный характер и где монотонный.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 31.

1. Фракталы и фрактальная размерность. Примеры фрактальных структур в природе: длина береговой линии, объем облака, формирование крон деревьев, альвеолы легких, мембраны митохондрий.

2. Модель хищник-жертва в безразмерных переменных может быть описана системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 + bx - y). \end{cases}$$

Здесь коэффициент $b = 2$ определяет скорость поедания жертв хищником.
Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний. Постройте фазовый портрет системы.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 32.

1. Фракталы и фрактальная размерность. Математические фракталы. Кривая Коха. Треугольник и салфетка Серпинского. Канторово множество. Канторов стержень, чертова лестница.

2. Модель хищник-жертва в безразмерных переменных может быть описана системой уравнений:

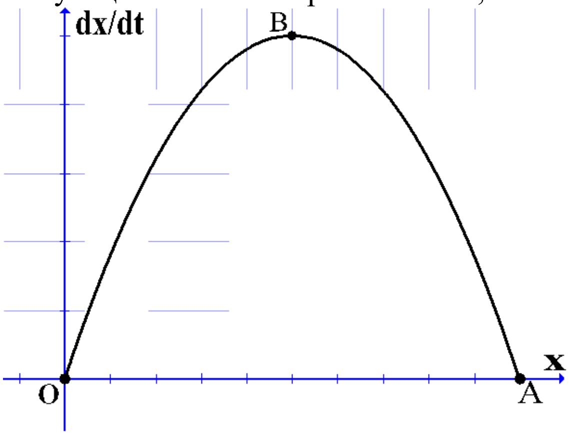
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 + bx - y). \end{cases}$$

Здесь коэффициент $b = 0.5$ определяет скорость поедания жертв хищником.
Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний. Постройте фазовый портрет системы.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 33.

1. Процессы переноса в биологических системах. Активные автоволновые среды. Понятие потока, законы Фика. Вывод уравнения диффузии. Общий вид решения уравнения диффузии, волновое число.

2. Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста. Зависимость скорости роста от численности популяции представлена на графике. Координаты точек: A(1000,0); B(500, 1000).
По графику определите значения параметров логистического уравнения. Определите численность популяции в момент времени $t=1$, если начальная численность равна 10.



Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 34.

1. Распределенные триггеры. Общий вид системы уравнений. Неустойчивость однородного в пространстве стационарного состояния. Примеры: распределенный генетический триггер Жакоба и Моно, модель гидры Гирера-Майнхардта.

2. Определите тип стационарного состояния системы в зависимости от значения параметра *a* (*a* > 0).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay\left(x - \dfrac{2}{1+y}\right) \end{cases}$$

Укажите интервал значений параметра *a*, при котором в системе возможны автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 35.

1. Распространение волны в системах с диффузией. Базовая модель Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера. Возбудимые среды.

2. В 1798 году Томас Мальтус предположил закон роста численности населения Земли: $\frac{dN}{dt} = rN$.
Согласно его предположению, численность людей через 25 лет должна была удвоиться. К какому году численность населения Земли достигла бы 7 миллиардов человек, если бы закон Мальтуса действовал? Во времена Мальтуса население Земли составляло 700 тысяч человек.

Биологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.
Математические модели в биологии.
Билет № 36.

1. Модели распространения нервного импульса: классическая модель Ходжкина-Хаксли и базовая модель Фитцхью-Нагумо. Распространение нервного импульса.

2. Проведите исследование для следующего уравнения:

$\frac{dx}{dt} = x^2 - bx + 4$ (для $x > 0$, $b > 0$).

Найдите значения параметра b, при котором
а) стационарных состояний нет;
б) есть только одно стационарное состояние;
в) есть два стационарных состояния.

Нарисуйте фазовый портрет для приведенного уравнения и изобразите на нем движение фазовой переменной при $b = 5$ и начальном значении $x(0) = 3$.
Постройте фазопараметрическую диаграмму $\bar{x}$ (b).