Базовые понятия курса
“Биоинформатика и математические методы в биологии”

Составители: А. Нестеренко, Т. Плюснина, А. Дьяконова, П. Фурсова, Г. Ризниченко

Кафедра биофизики биологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
Москва. 2016 г.

Здесь приводится элементарный набор определений, посвященный одиночным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) и системам из двух ОДУ первого порядка. Без понимания этих определений (за исключением понятий повышенной сложности, обозначенных символом **[*]**) оценка на экзамене не ставится. Теория рассматривается для одно- и двухмерных автономных ОДУ, разрешенных относительно производной.

Загрузить в формате PDF

1. ОДУ порядка n — это функциональное уравнение, связывающее производные искомой функции $f(x)$ одной переменной x и саму переменную. Его можно записать в виде:

$$\Phi\left\{f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x),\ \dots, f'(x), f(x), x\right\} = 0 \tag{1}$$

Прилагательное “обыкновенный” обозначает тот факт, что дифференцирование производится только по одной переменной (т.н. *свободной переменной*). При описании многих физических и биологических процессов такой переменной является время t.

2. Свободные и зависимые переменные системы ОДУ. Те переменные, для которых выписываются уравнения, называются *зависимыми* или *фазовыми*; это искомые функции уравнения. Те переменные, по которым производится дифференцирование называются *свободными*. Задача решения состоит в том, чтобы найти зависимость фазовых переменных от свободных.

3. Динамическая система — модельная система, состояние которой в данный момент времени описывается набором величин, и для которой задан закон эволюции этого состояния во времени. Часто динамическая система описывается одним или более ОДУ; время является в этих уравнениях единственной свободной переменной.

4. ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной — это такое ОДУ, в котором производная $x'(t)$ выражена явным образом через зависимые и независимые переменные. Такое уравнение имеет вид:

$$x'(t) = \Phi\{x(t), t\} \tag{2}$$

5. Автономное ОДУ — разрешенное относительно производной уравнение вида

$$x'(t) = \Phi\{x(t)\}, \tag{3}$$

где правая часть не зависит явно от времени t. Зависимость от времени входит в правую часть только косвенно, через зависимость от переменной x.

6. Автономная система двух ОДУ — система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & P(x(t), y(t)), \\ \dfrac{dy}{dt} = & Q(x(t), y(t)). \end{cases} \tag{4}$$

7. Векторное поле автономной системы ОДУ — сопоставление каждой точки фазового пространства вектора, соответствующего направлению движения системы. Для двухмерной системы (4) поле строится следующим образом: каждой точке (x, y) фазовой плоскости ставится в соответствие вектор с компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и началом в этой точке.

8. Начальные условия автономного ОДУ или системы автономных ОДУ — значения зависимых переменных в начальный момент времени. Так, начальные условия для одного автономного ОДУ (3)

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

Начальные условия для системы двух автономных ОДУ (4):

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

9. Решением автономного ОДУ или системы ОДУ называется зависимость $x(t)$ или пара зависимостей $\{x(t); y(t)\}$, удовлетворяющие уравнениям (3) или (4), соответственно (*общее решение*). Решение, также удовлетворяющее начальным условиям (5) или (6), называется *частным решением.*

10. Фазовое пространство автономного ОДУ (3), или системы ОДУ (4) — прямая значений x, или плоскость значений (x, y), соответственно. С учетом размерности разумно использовать словосочетания "фазовая прямая", "фазовая плоскость".

11. Изображающая точка — значение функции x или пара значений (x, y) в определенный момент времени t. Изображающая точка принадлежит фазовому пространству (см. 9.).

12. Фазовая траектория (интегральная кривая) — кривая в фазовом пространстве, положение которой определяется решением системы автономных ОДУ.

13. Кинетическая кривая — график изменения зависимых переменных от времени (решений) автономных ОДУ или системы ОДУ.

14. Фазовый портрет автономных ОДУ или системы ОДУ — совокупность интегральных кривых (фазовых траекторий) с указанием направления движения изображающей точки по этим кривым.

15. Стационарное состояние ...
...автономного ОДУ (3) — значение функции $x(t)$, для которого $\Phi(x) = 0$.
...системы автономных ОДУ (4) — значения функций $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} P(x, y) = & 0, \\ Q(x, y) = & 0. \end{cases}$$

Такие точки также называют *стационарными точками* и *точками покоя.*

16. Устойчивость по Ляпунову стационарной точки определяется следующим образом. Стационарное состояние называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия ε можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.

17. Устойчивым стационарным состоянием (асимптотически устойчивым) называется такое стационарное состояние автономного ОДУ или системы ОДУ, что при малом отклонении от этого состояния, система будет стремиться *приблизиться* обратно к нему. Асимптотически устойчивое состояние является устойчивым и по Ляпунову. Обратное не верно.

18. Изоклина — кривая на фазовой плоскости, обладающая таким свойством, что все касательные к интегральным кривым, построенные в точках пересечения ими изоклины, параллельны. Другими словами, все интегральные кривые пересекают изоклину под одним углом. Для системы двух автономных ОДУ изоклины горизонтальных касательных определяется как $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y) = \operatorname{tg} 0 = 0$, а изоклина вертикальных касательных — $P(x,y)/Q(x,y) = \operatorname{tg}\pi/2 = \infty$.

19. Система двух линейных автономных ОДУ — система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = & cx + dy. \end{cases} \tag{7}$$

20. Линеаризованная в стационарной точке система автономных ОДУ — аппроксимация системы ОДУ (4) в малой окрестности стационарной точки системой линейных ОДУ, построенная путем разложения правых частей в ряд Тейлора до первого члена в стационарной точке $(\overline{x}, \overline{y})$. Линеаризованная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\xi + \dfrac{\partial P}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = & \dfrac{\partial Q}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\xi + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\eta. \end{cases} \tag{8}$$

Переменные ξ и η имеют смысл отклонений от положения равновесия. Интегральные кривые линеаризованной системы, смещенные на $\overline{x}$ по оси X и на $\overline{y}$ по оси Y, аппроксимируют интегральные кривые исходной системы в окрестности стационарной точки.

21. Матрица линеаризации (матрица Якоби) для системы двух линейных ОДУ (7) — матрица линейных коэффициентов $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Матрицей Якоби для системы ОДУ (4) в стационарной точке, называется матрица Якоби для соответствующей линеаризованной системы ОДУ (8).

22. Характеристическим уравнением для системы линейных ОДУ (7) называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

где вертикальные прямые обозначают определитель матрицы. Характеристическое уравнение системы ОДУ — это характеристическое уравнение ее матрицы Якоби.

23. Характеристические числа (показатели Ляпунова) линейной системы ОДУ (7) — это решения, λ, характеристического уравнения этой системы. Другими словами, это собственные значения матрицы линеаризации (см. 21).

24. Типы особых точек — характер фазового портрета вблизи особой точки системы двух линейных ОДУ. Различают несколько типов:

- **Фокус**[1] — грубый[2] тип. Система имеет комплексно сопряженные характеристические числа с ненулевой действительной частью. В зависимости от знака действительной части различают "неустойчивый" ($\mathbf{Re}\ \lambda > 0$) и "устойчивый" ($\mathbf{Re}\ \lambda < 0$) фокус.
- **Узел** — грубый тип. Система имеет действительные характеристические числа одного знака. В зависимости от знака различают "неустойчивый" ($\lambda > 0$) и "устойчивый" ($\lambda < 0$) узел.
- **Седло** — грубый тип особой точки. Характеристические числа системы действительные и разных знаков.
- **Центр** — негрубый[2] тип. Все траектории вблизи особой точки замкнутые. Характеристические числа системы чисто-мнимые.

25. Аттрактор — множество точек на фазовой плоскости или точки на фазовой прямой, к которым стремится изображающая точка (сходятся интегральные кривые). Устойчивая стационарная точка и устойчивый предельный цикл — примеры аттракторов.

26. Сепаратриса — интегральная кривая, начинающаяся или заканчивающаяся в точке седлового состояния равновесия. Седло имеет четыре сепаратрисы[3], начинающиеся в точке седла — две устойчивых (направленных к седловой точке) и две неустойчивых (исходящих из седловой точки). Часто сепаратриса разделяет области притяжения различных аттракторов.

27. Предельный цикл — изолированная замкнутая интегральная кривая, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых интегральных кривых. Когда такая траектория является аттрактором[4], говорят, что предельный цикл устойчив. Когда, напротив, интегральные кривые отходят от предельного цикла, его называют неустойчивым.

28. [*] Структурно эквивалентными будем называть два фазовых портрета, которые могут быть получены друг из друга путем гладкой невырожденной деформации. Если представить все фазовые траектории портрета в виде совокупности ориентированных проволочек, то искомая деформация — есть получение одного портрета из другого путем изгибания всех проволочек с сохранением направлений, таким образом, чтобы все они оставались непересекающимися[5].

29. [*] Структурно устойчивый (или грубый) фазовый портрет автономного ОДУ (3) или системы ОДУ (4) — портрет, который структурно эквивалентен всем фазовым портретам, получаемым при малом "шевелении" векторного поля (функции $\Phi(f)$ или функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$).

[1]Названия фазовых портретов определяются для линейной системы. Однако они используются также для портретов вблизи стационарных точек систем нелинейных автономных ОДУ, линеаризация которых в этой точке имеет соответствующий портрет. Это осмысленно, поскольку вблизи стационарной точки нелинейные системы ведут себя как линеаризованные.

[2]Грубость фазового портрета означает его структурную усойчивость к малым шевелиям векторного поля (см. ниже). Негрубый тип характерен для точек бифуркации.

[3]В нелинейных системах две сепаратрисы могут совпадать, тогда говорят о петле седла.

[4]Приведенные в данном списке критерии устойчивости для предельных циклов не подходят. Для характеризации их устойчивости используется критерий асимптотической орбитальной устойчивости, который мы не раскрываем.

[5]Строгое определение гладкой деформации потребовало бы топологической терминологии.

30. Седло-узел — негрубый фазовый портрет вблизи особой точки, возникает в нелинейных системах при слиянии седла и узла. Одно из характеристических чисел системы, линеаризованной вблизи этой особой точки, равно нулю. С одной стороны от особой точки поведение траекторий напоминает узел, с другой стороны — седло. Седло-узел возникает в модели генетического триггера Жакоба-Моно при его параметрическом переключении (см. *Триггер* и *Параметрическое переключение триггера*).

31. Фазопараметрическая диаграмма автономного ОДУ или системы ОДУ, у которых правая часть включает зависимость от параметра (параметров), — это графическое изображение зависимости положения стационарных точек от параметров.

32. Бифуркация — структурная перестройка (преобразование не сохраняющее структурную эквивалентность) фазового портрета при малом изменении параметра, включенного в правую часть ОДУ или системы ОДУ. При бифуркации происходит изменение числа и/или типа стационарных точек и/или предельных циклов.

33. Точка бифуркации ОДУ или системы ОДУ, зависящих от параметра — это точка на фазово-параметрической диаграмме, в которой малое изменение параметров приводит к возникновению структурно неэквивалентных фазовых портретов.

34. Седло-узловая бифуркация — бифуркация системы ОДУ вблизи стационарной точки седло-узел. При малом "шевелении" векторного поля фазовый портрет вблизи стационара становится либо парой узел+седло, либо особая точка исчезает. В ходе седло-узловой бифуркации оба характеристических числа остаются действительными, а одно из них меняет знак.

35. Бифуркация Андронова-Хопфа — бифуркация положения равновесия системы нелинейных ОДУ, возникающая при переходе действительной части характеристических чисел через ноль, и сопровождающаяся рождением/смертью предельного цикла вокруг рассматриваемого положения равновесия. При малом "шевелении" векторного поля фазовый портрет в окрестности стационарной точки становится либо устойчивым, либо неустойчивым фокусом.

36. Быстрые и медленные переменные — условное разделение, допустимое для некоторых систем ОДУ. Такое разделение возможно, когда характерное время изменения одних переменных ("быстрых") намного меньше характерного времени изменения других ("медленных").

37. Мультистационарная система — ОДУ или система автономных ОДУ, имеющая в фазовом пространстве несколько стационарных точек.

38. Триггер — динамическая система, имеющая более одной устойчивого состояния; в фазовом пространстве данные состояния разделяются сепаратрисой или неустойчивым состоянием.

39. [*] Параметрическое управление автономным ОДУ или системой ОДУ — это исследование поведения изображающей точки ОДУ в зависимости от параметра, который изменяется медленно, по сравнению с переменными системы. Например, для системы ОДУ это может означать решение расширенной системы следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & P(x, y, \alpha), \\ \dfrac{dy}{dt} = & Q(x, y, \alpha), \\ \alpha = & A(t). \end{cases} \tag{10}$$

где $A(t)$ — функция, меняющаяся медленно по сравнению со скоростью изменения переменных x и y (говорят, что функция A задает путь эволюции параметра). Также параметр α может меняться дискретно.

40. Параметрическое переключение триггера при его параметрическом управлении — подбор такого *обратимого* пути изменения параметра, которое переводит изображающую точку из одной области притяжения в другую.

Для системы (10) под обратимым понимается любой путь, который возвращает параметр через время T в исходное состояние: $A(T) = A(0)$. В ходе параметрического переключения параметр всегда проходит точку бифуркации, что приводит к изменению количества стационарных состояний. Из двух стационарных состояний сначала остается одно, затем их становится снова два, но изображающая точка оказывается уже в другом стационаре.

41. [*] Гистерезис — это ситуация параметрического управления (10), когда положение изображающей точки не является однозначной функцией параметра. Гистерезис возникает в триггерной системе, с выделенным параметром, изменение которого может переводить систему между двумя устойчивыми стационарами. При этом достигаемое стационарное состояние зависит от *пути изменения* параметра. Так, если $\alpha = A(t_1) = A(t_2)$, при гистерезисе может оказаться, что $x(t_1) \neq x(t_2)$. Гистерезис часто наблюдается при циклическом параметрическом переключении триггера.

42. [*] Катастрофа в динамической системе при ее параметрическом управлении — резкое, нелинейное смещение изображающей точки при плавном переходе параметра через точку бифуркации. Примером катастроф являются некоторые виды параметрического переключение триггера. Также примером катастрофы является *жесткое рождение предельного цикла*, когда изображающая точка резко переходит из положения равновесия на устойчивый предельный цикл конечного радиуса.