

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

Обыкновенное
дифференциальное
уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение.
Правая часть не зависит
явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx \sin wt$$

x, t – переменные

a, b, d, w – параметры

Стационарное состояние

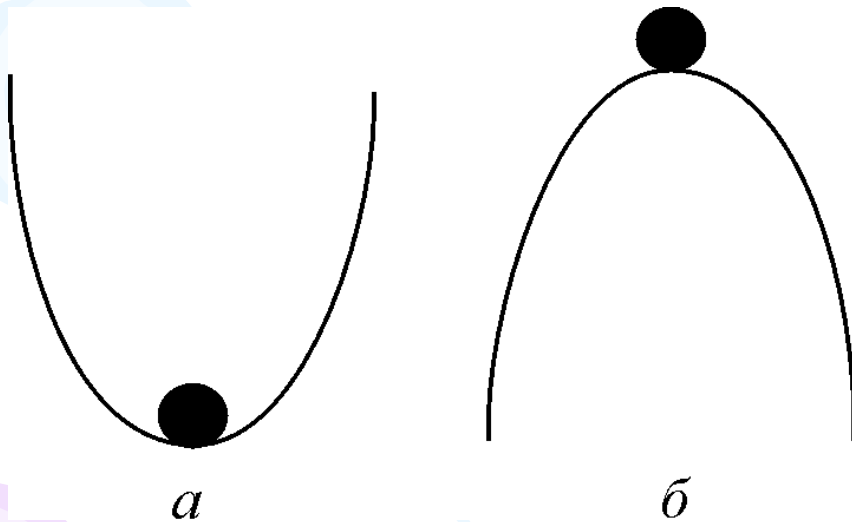
$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения
переменной x
равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть
уравнения
равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



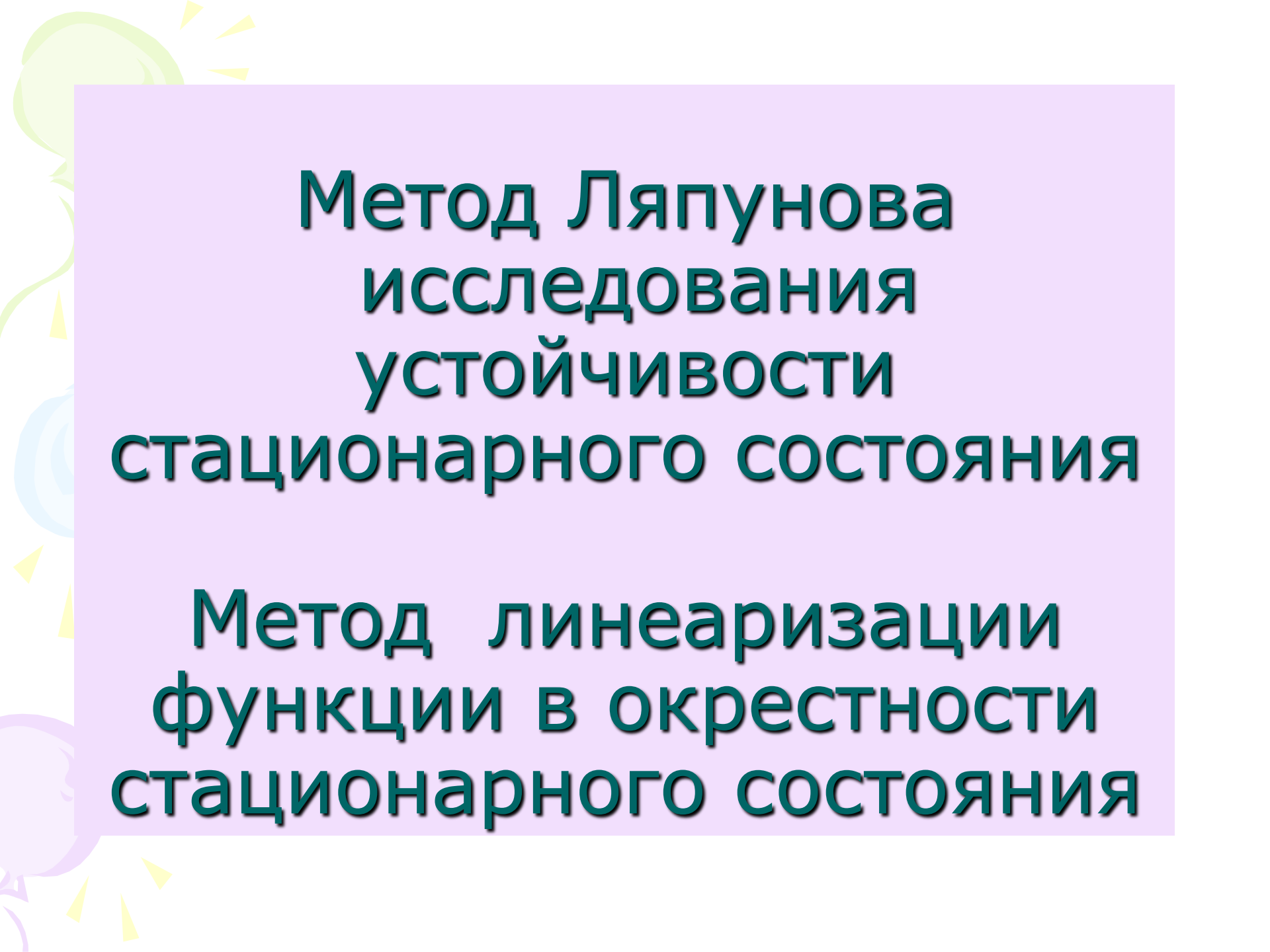
Стационарное
состояние
устойчиво, если
малые отклонения
с течением
времени остаются
малыми

Определение устойчивости по Ляпунову

Состояние равновесия (стационарное состояние) *устойчиво по Ляпунову*, если, задав сколь угодно малое положительное ε , всегда можно найти такое δ , что

Если в начальный момент отклонение $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$,
то для любого последующего момента времени $t_0 \leq t < +\infty$

Отклонение от стационарного состояния $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$



**Метод Ляпунова
исследования
устойчивости
стационарного состояния**

**Метод линеаризации
функции в окрестности
стационарного состояния**

Выразим переменную x
через отклонение от
стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi \quad \xi / \bar{x} \ll 1$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в
ряд

Тейлора в точке $\bar{x}$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \dots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда





Отбросим члены более
высокого порядка.
Получим
линеаризованное
уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

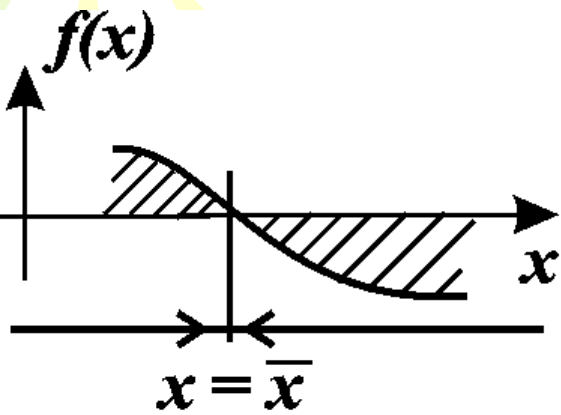
$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

C — произвольная постоянная. $C = \xi(0)$

Метод Ляпунова

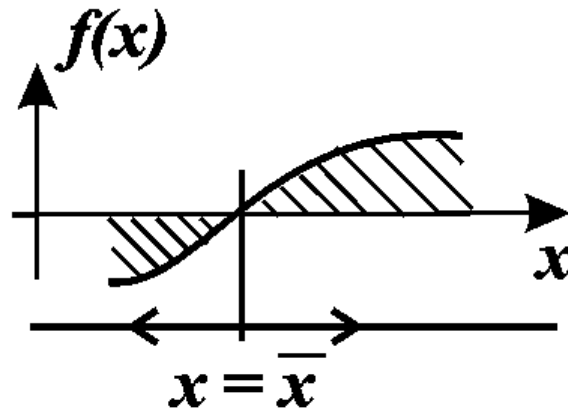
Устойчивость стационарного состояния уравнения $dx/dt=f(x)$ определяется знаком производной правой части в стационарной точке. Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении $f(x)$ членов более высокого порядка

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



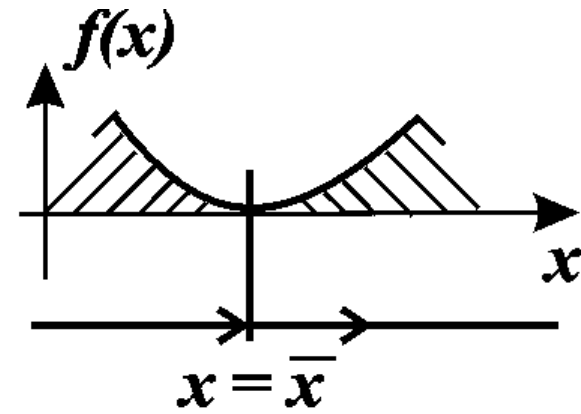
a

устойчиво



б

неустойчиво



в

неустойчиво

Типы аттракторов

- Устойчивая точка покоя
- Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)
- Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).