

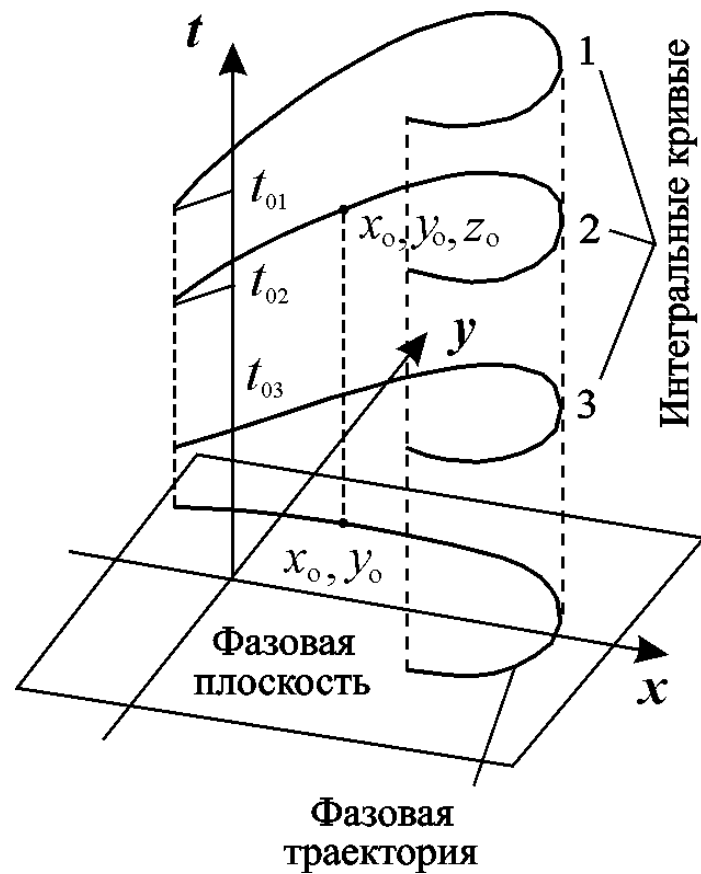
Фазовая плоскость

Г.Ю.Ризниченко

Качественное исследование

Анализ устойчивости  
стационарного состояния  
системы двух автономных  
дифференциальных  
уравнений

# Траектории системы в пространстве $(x, y, t)$



**Жюль Анри Пуанкаре́**  
(Jules Henri Poincaré)  
1854-1912)

# Типы устойчивости стационарного состояния

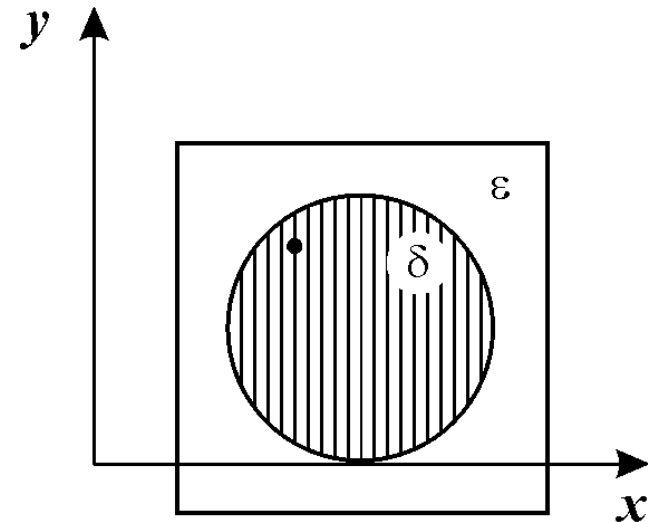


$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

**Ляпунов Александр Михайлович** (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

# Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия ( $\varepsilon$ ) можно указать область  $\delta(\varepsilon)$ , окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области  $\delta$ , никогда не достигнет границы  $\varepsilon$ .



Устойчивость  
стационарного  
состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде:  $x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

Условие  
нетривиального  
решения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

# Устойчивость определяется действительной частью собственного числа $\lambda$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Если числа  $\lambda_1, \lambda_2$  – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа  $\lambda_1, \lambda_2$  – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – действительны и разных знаков – седло

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексно сопряженные, решение ищется в виде  $x = e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t}$

Мнимая часть не сказывается на устойчивости

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексно сопряженные и  $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 < 0$  – устойчивый фокус

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексно сопряженные и  $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 > 0$  – неустойчивый фокус

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – чисто мнимые и  $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 = 0$  – центр

Формула Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

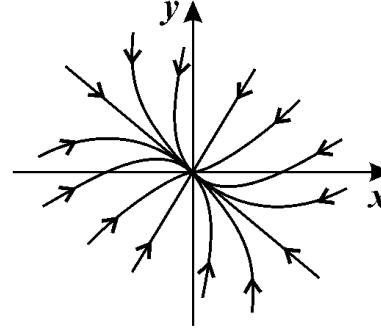
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

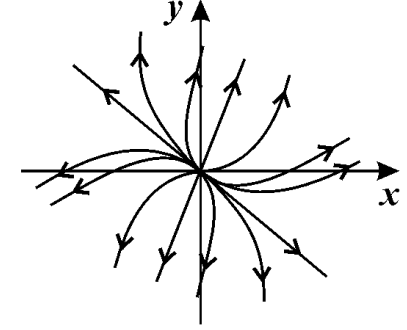
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

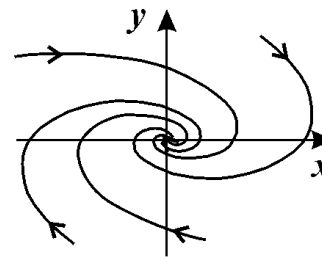
Формула Эйлера



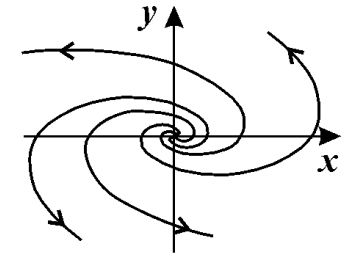
Устойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и отрицательны)



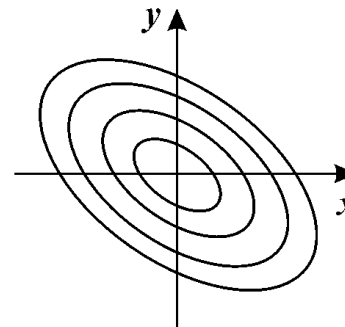
Неустойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и положительны)



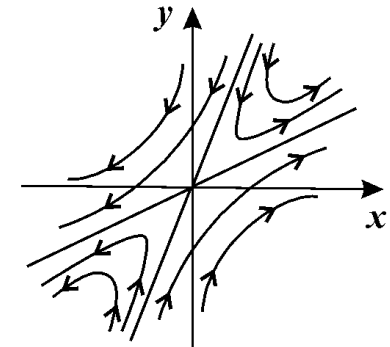
Устойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  
 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ )



Неустойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  
 $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$ )



Центр.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - чисто мнимые)



Седло.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - действительны и разных знаков)

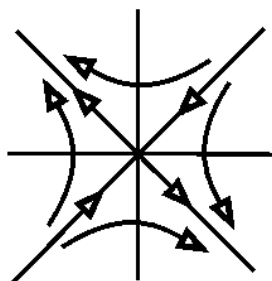
# Бифуркационная диаграмма

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Фазово-параметрическая

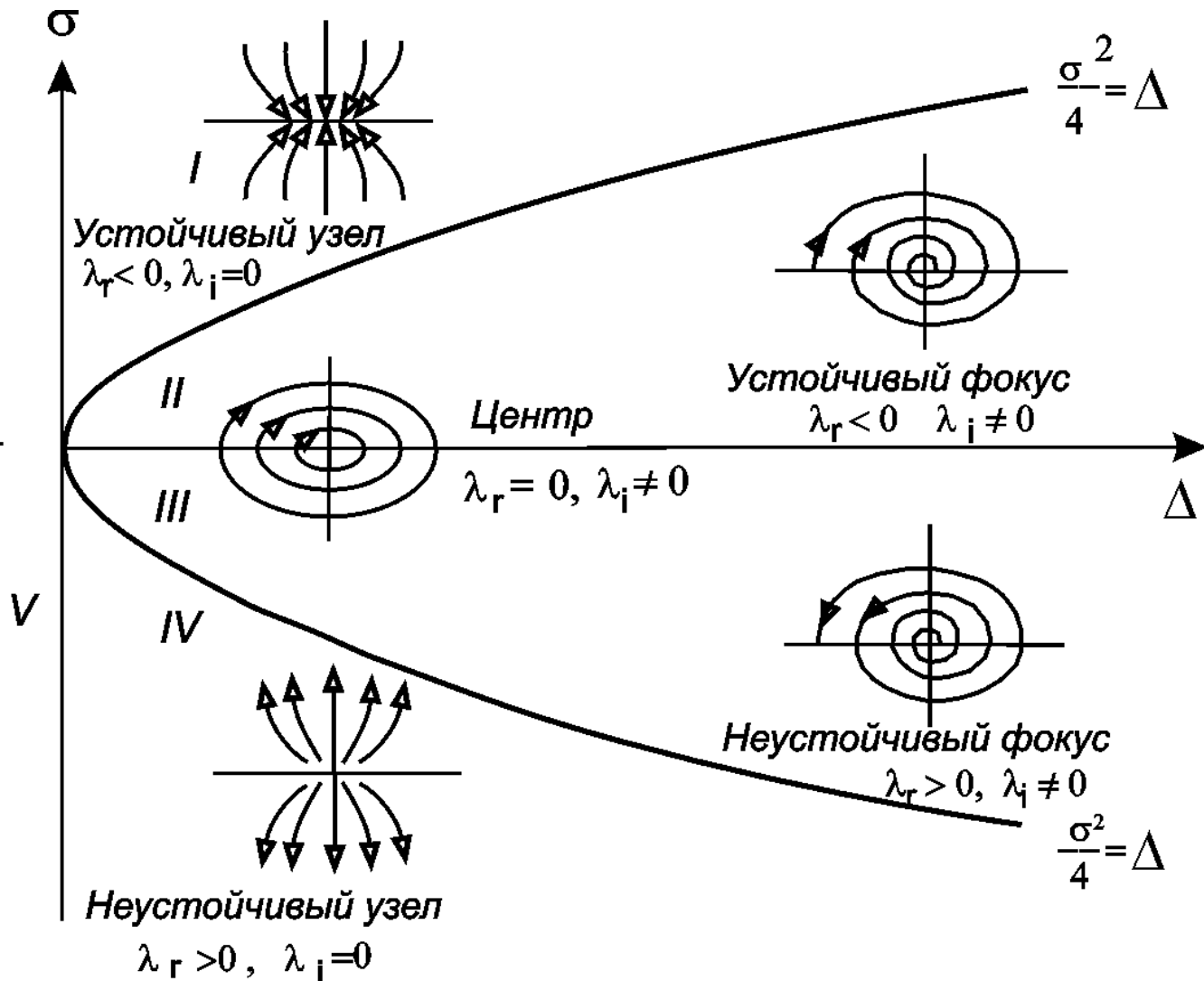
$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Седло

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$





# Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

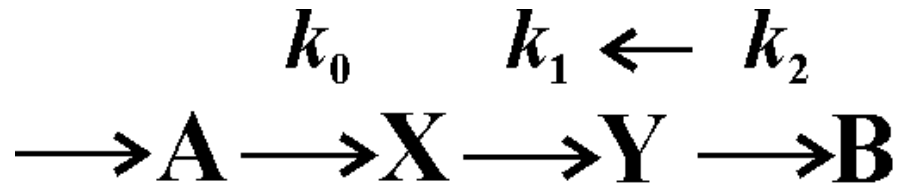
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Если *оба корня* характеристического уравнения имеют **отрицательную** действительную часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия устойчиво*;

- если *хотя бы один корень* имеет **положительную** действительную часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия неустойчиво*.
- Если *действительные части* *обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, а *другой отрицателен*, то линеаризованные уравнения *не дают ответа* на вопрос об устойчивости состояния равновесия, и необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned}$$

# Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. *Elements of Physical Biology*, 1925)



$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$



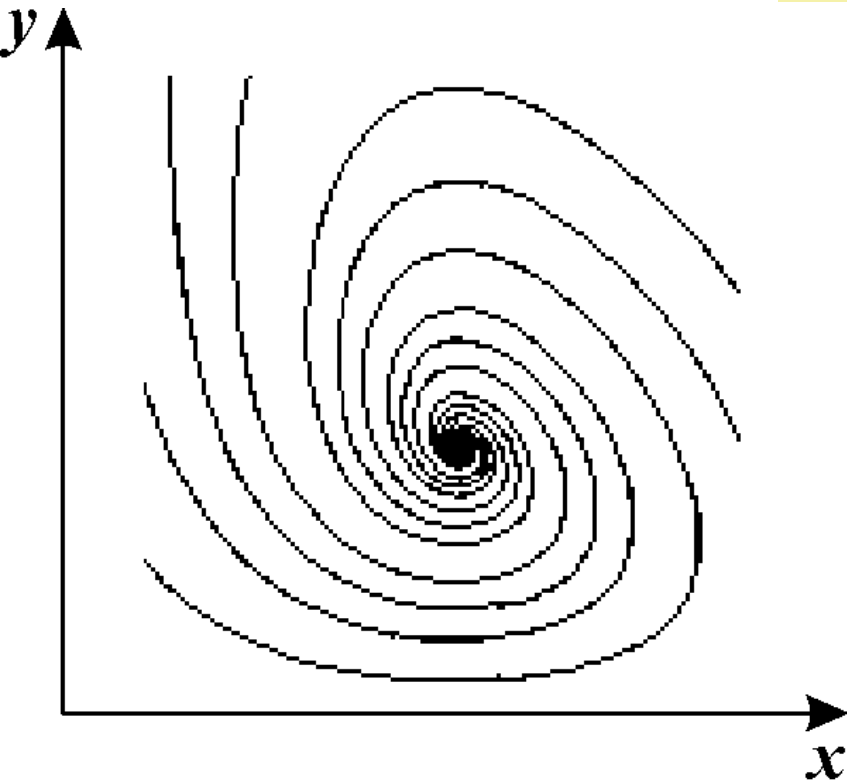
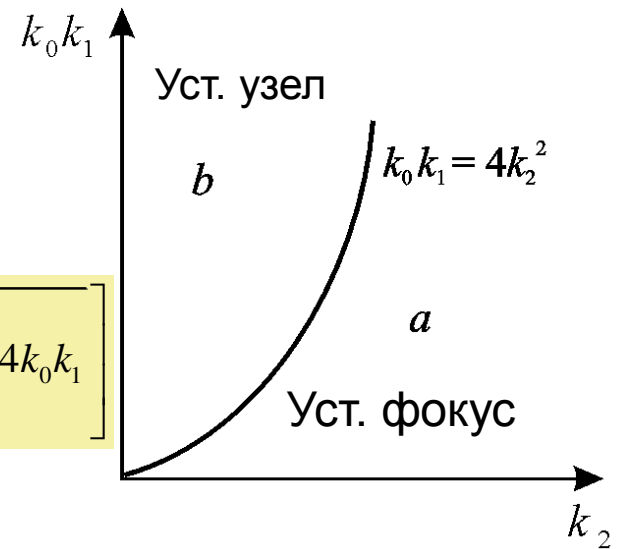
**Лотка Альфред Джеймс** (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы Лотки  
*a* – устойчивый фокус,  
*б* – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy,$$

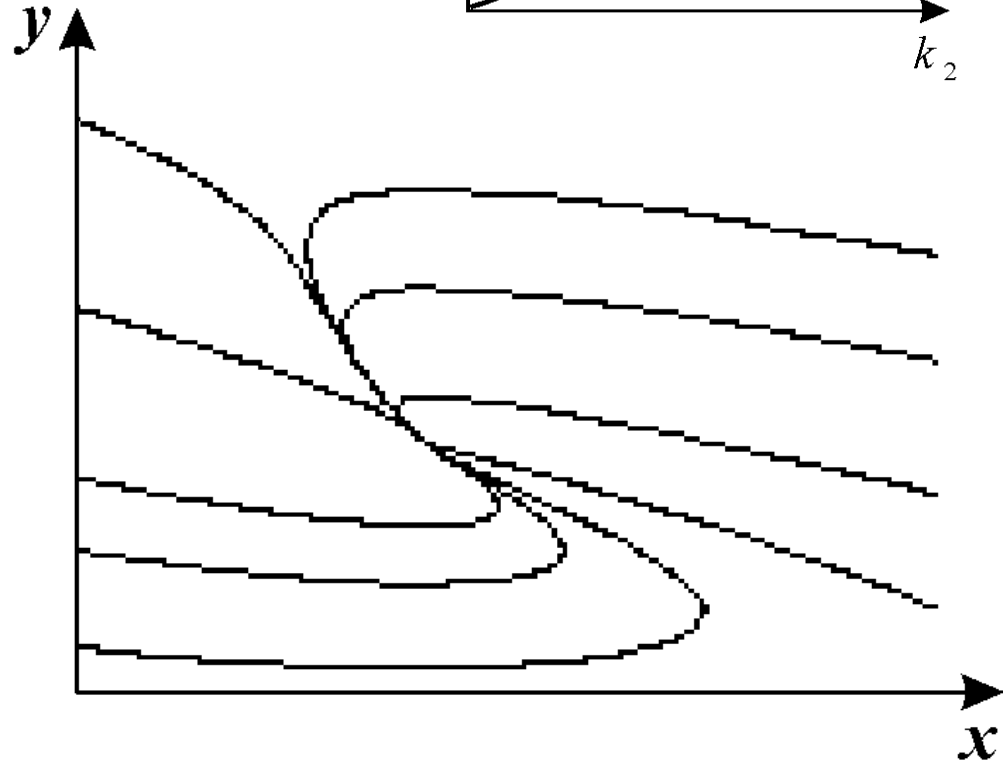
$$\frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{k_1k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left( \frac{k_1k_0}{k_2} \right)^2 - 4k_0k_1} \right]$$



*a*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



*б*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

# Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

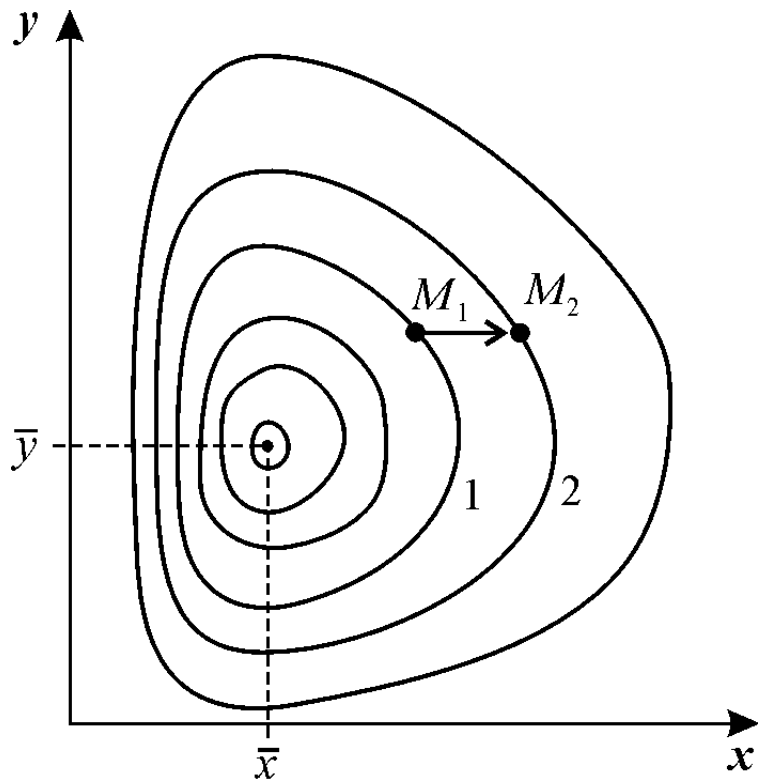
X – численность жертв

Y – численность хищников

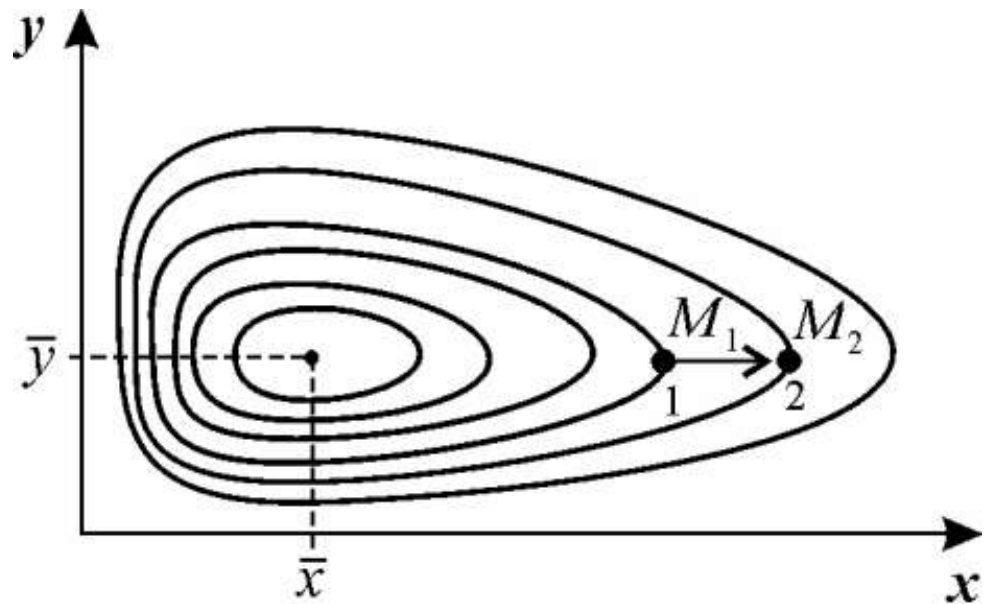


**Вольтерра Вито** (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

# Фазовый портрет модели Вольтерра



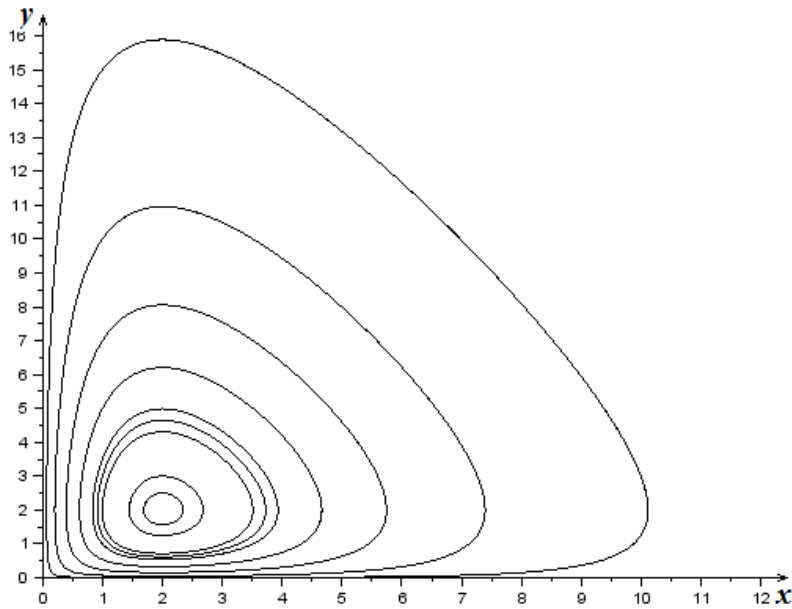
*a*



*б*

$$\varepsilon x = 4, \gamma_{xy} = 0,3, \varepsilon y = \gamma_{yx} = 0,4$$

$$\varepsilon x = 2, \gamma_{xy} = 0,3, \varepsilon y = \gamma_{yx} = 0,4$$



Volterra predator–prey model  
describing continuous oscillations of  
the population numbers.

(a) phase pattern;

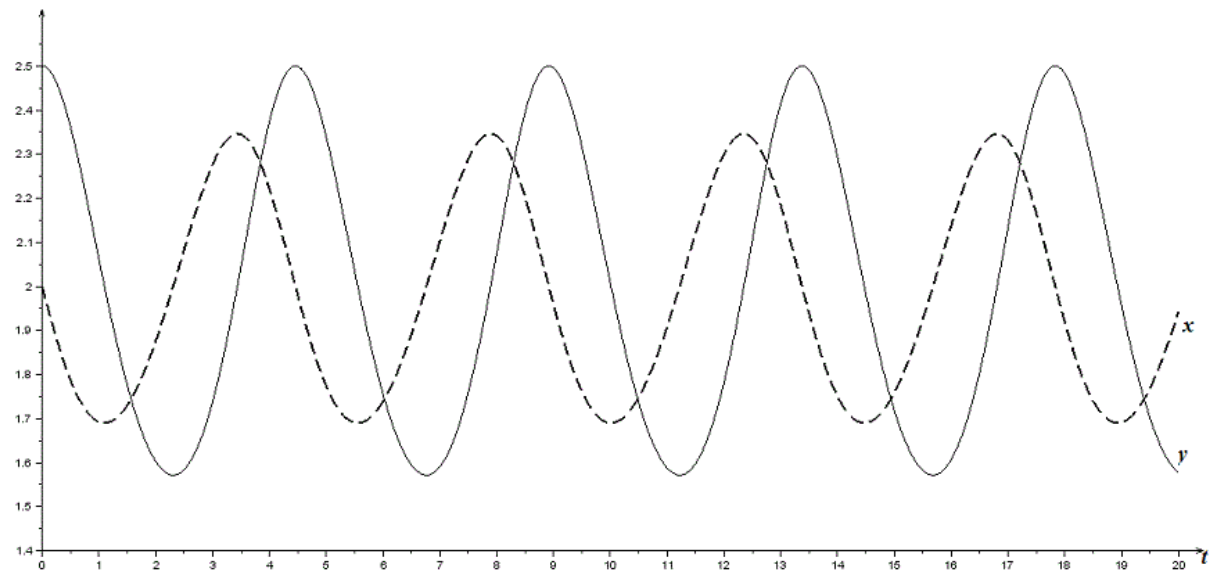
(b) dependence of the numbers  
of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

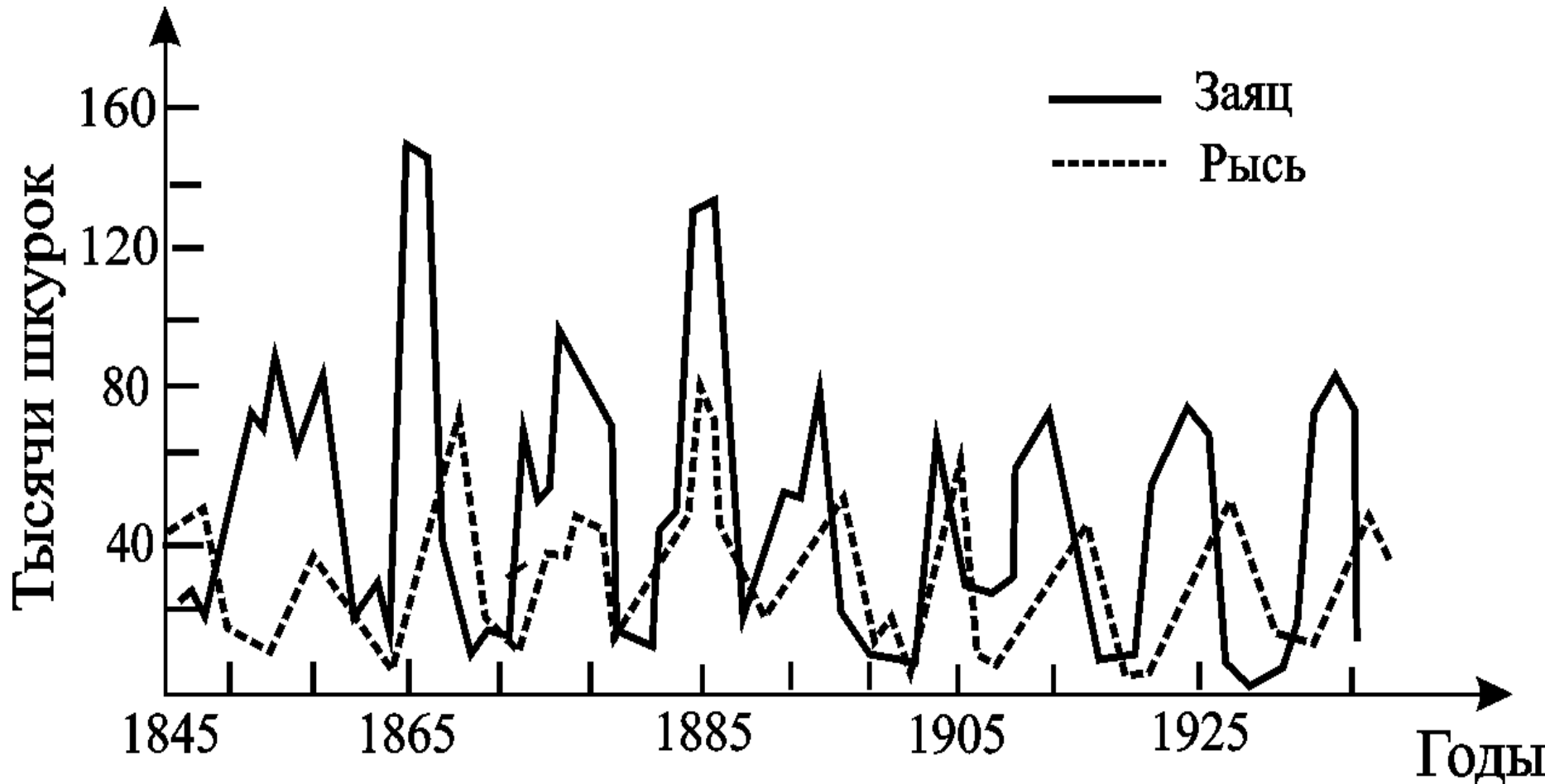
$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



# Кривые численности зайца и рыси в Канаде

(по К. Вилли, В. Детье, 1974)

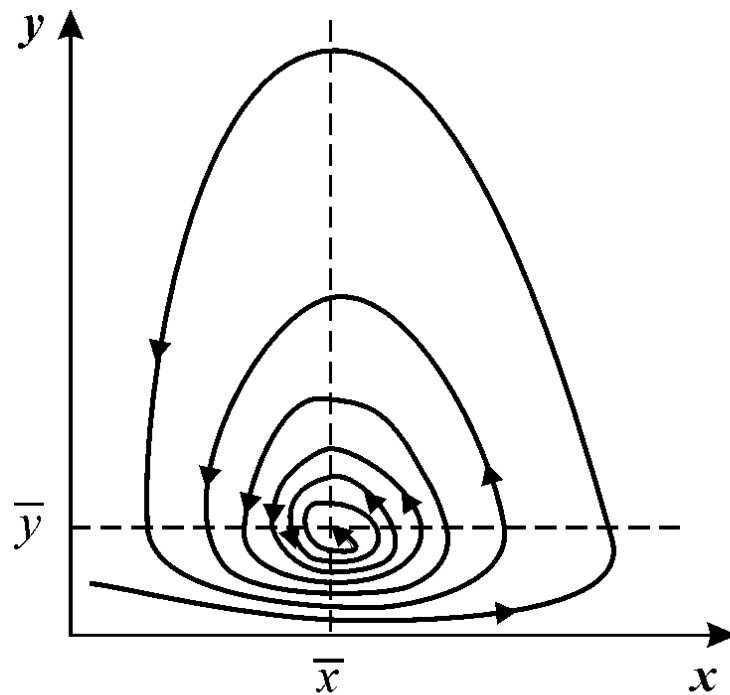




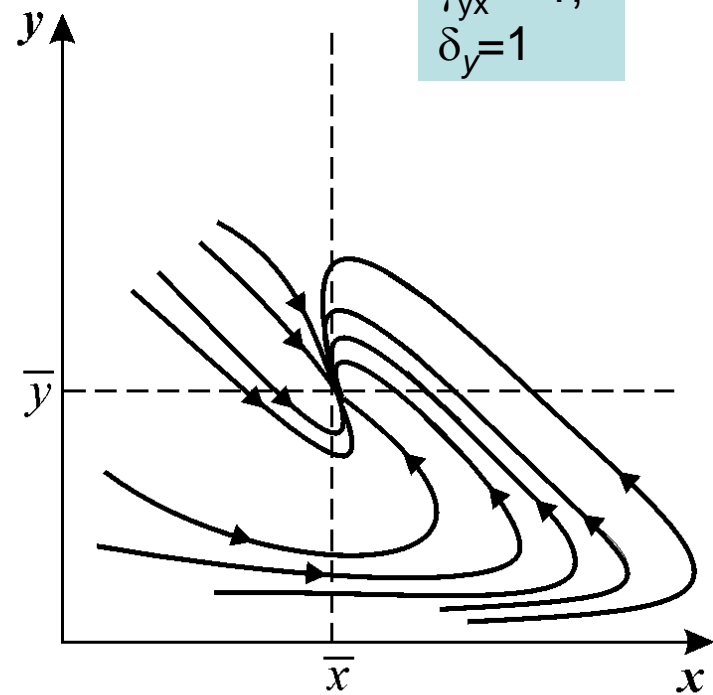
# Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 18, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 5, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$



*a*



*b*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 1, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 1, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$