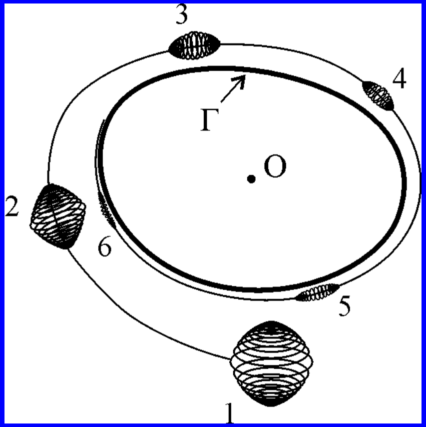
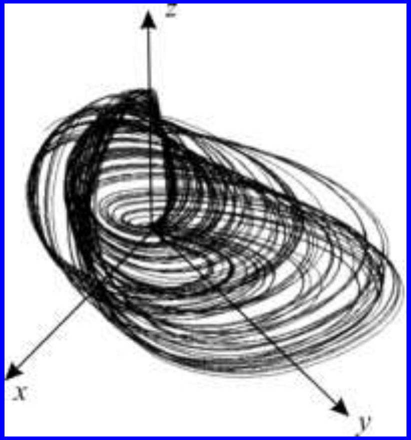
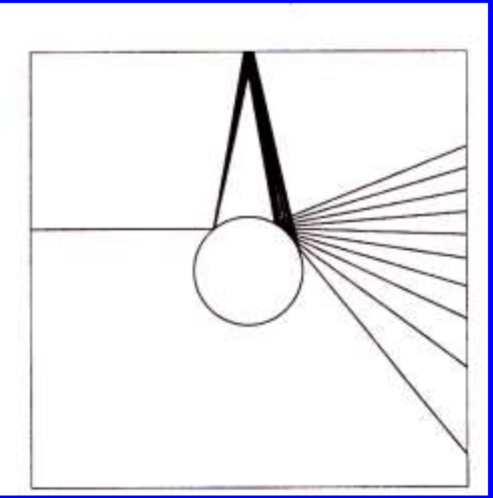
Г.Ю Ризниченко







Динамический хаос

Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца

- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).

- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

Динамический хаос. Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов. Фракталы*

χαος

CHAOS

Александр
Юрьевич
Лоскутов
1960-2011

Weather

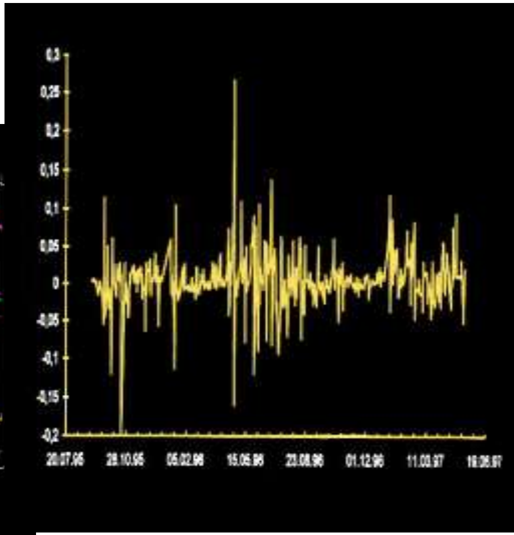
Э.Лоренц

Chemical
Kinetics

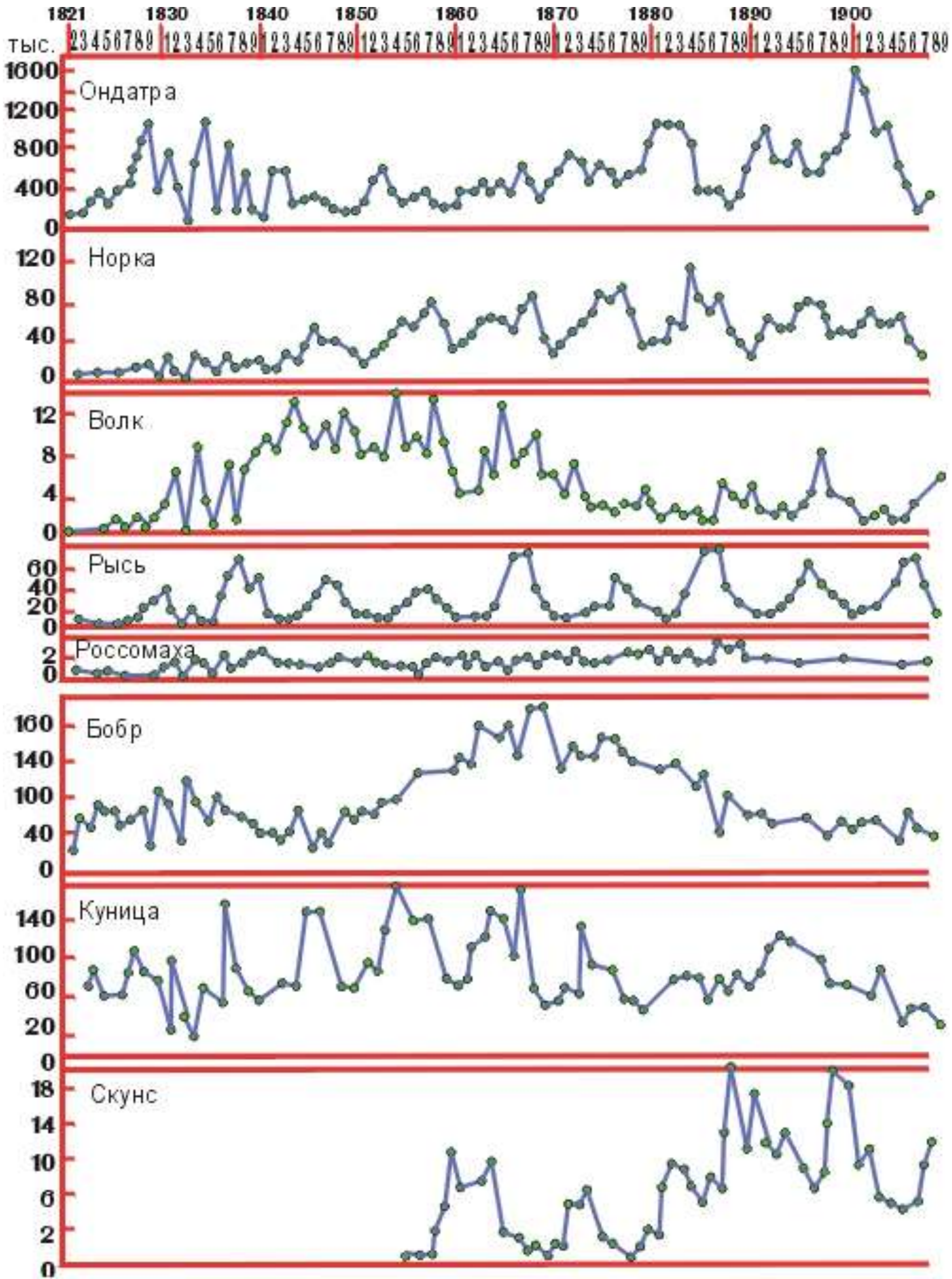
BZ-reaction

Белоусов и
Жаботинский

Heart rythm

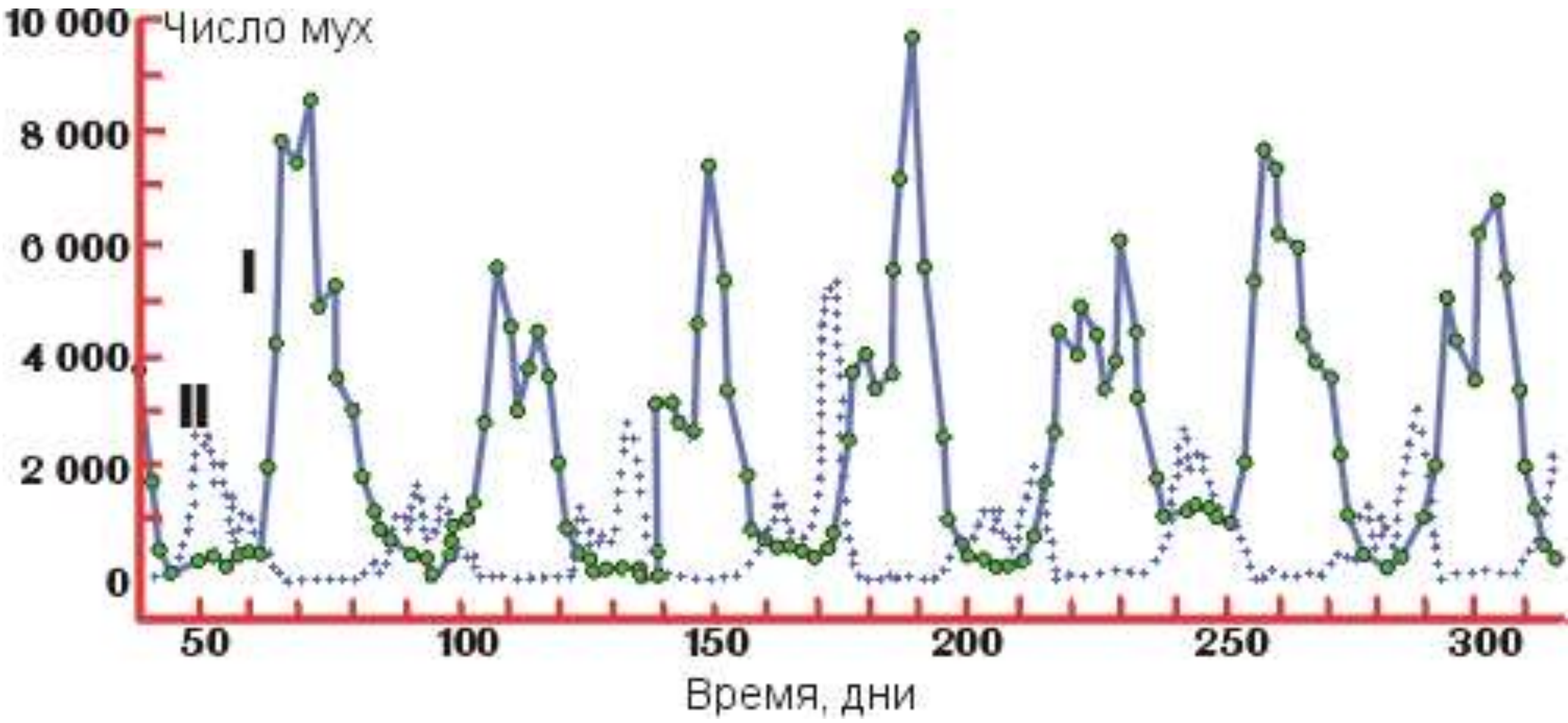


Биржевые
индексы



Данные по заготовкам пушнины компании Гудзонова Залива

Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре –

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать… Предсказание становится невозможным, мы имеет перед собой явление случайное».

Лоренц

Lorenz EN (1963) Deterministic non-periodic flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

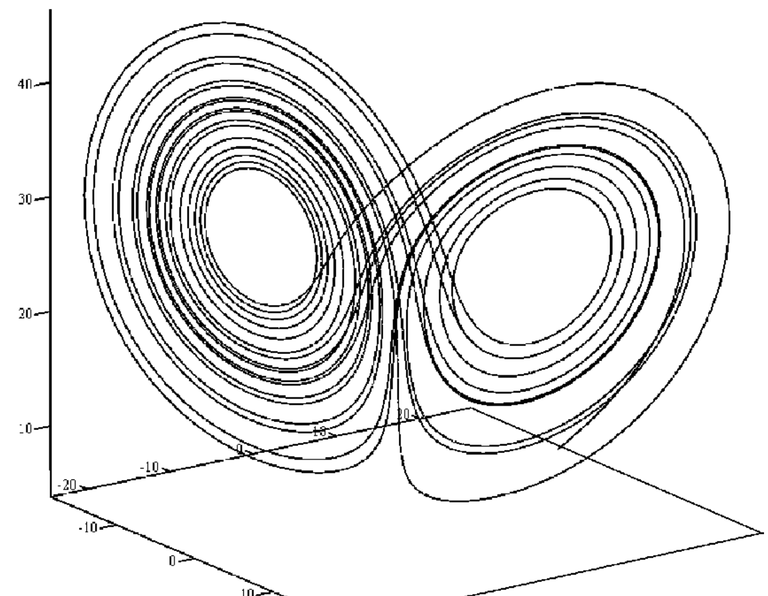
Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости, модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

r=28, s=10,
b=8/3



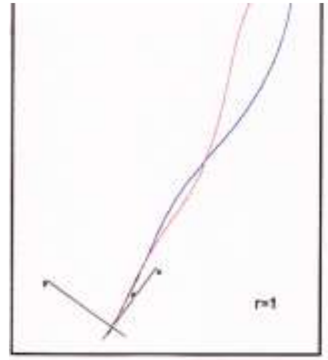
Хаотические траектории в системе Лоренца

•**Одномодовый лазер.** Здесь x — амплитуда волн в резонаторе лазера, y — поляризация, z — инверсия населённостей энергетических уровней, b и σ — отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, r — интенсивность накачки.

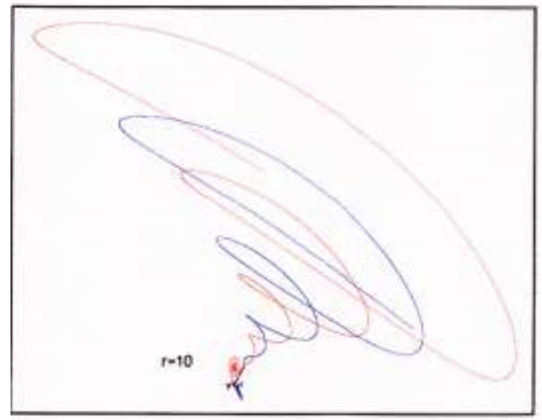
$$\dot{x} = \sigma\, y - \sigma\, x,$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

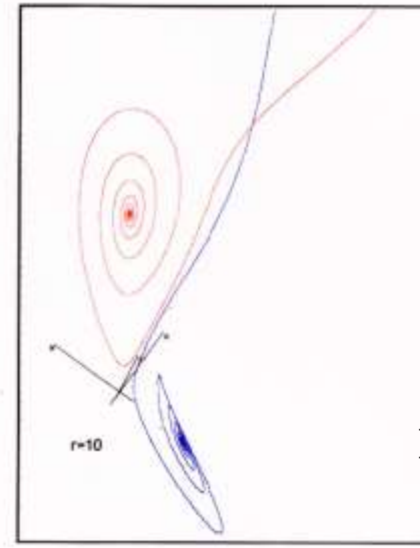
Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра r

Игорь Федик
каф. биофизики

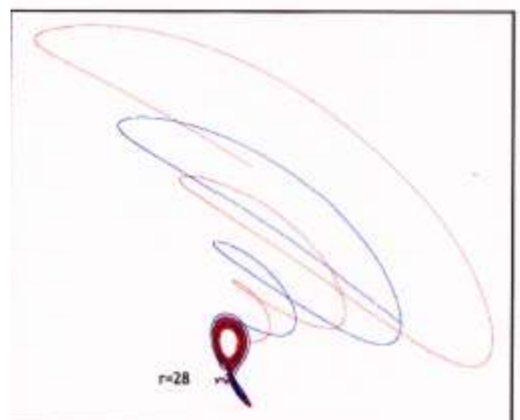


r=1

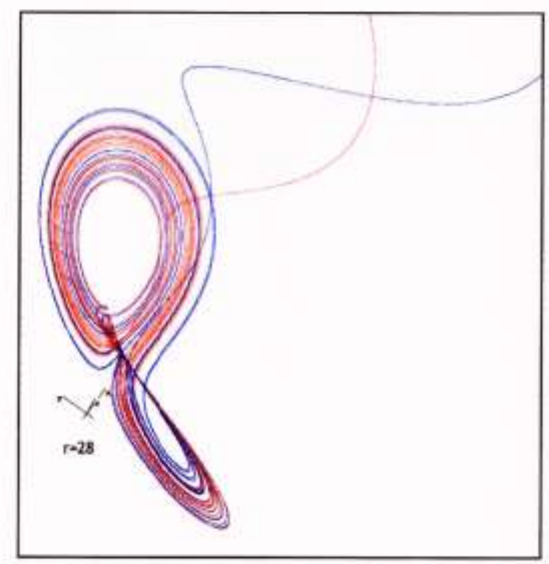




r=10



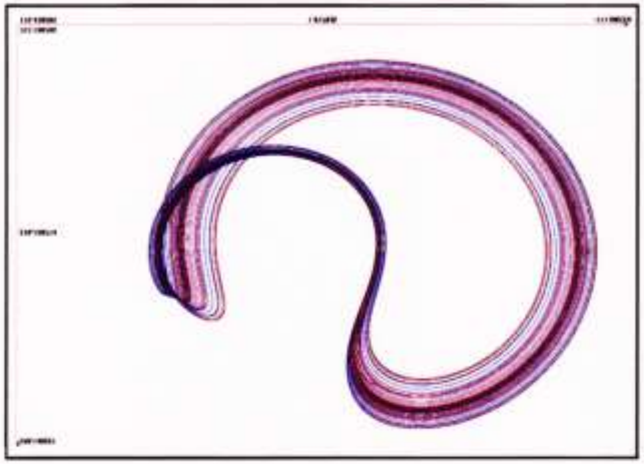
r=28

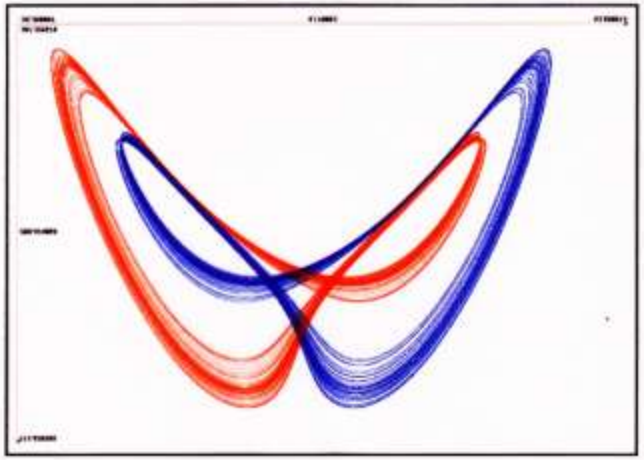


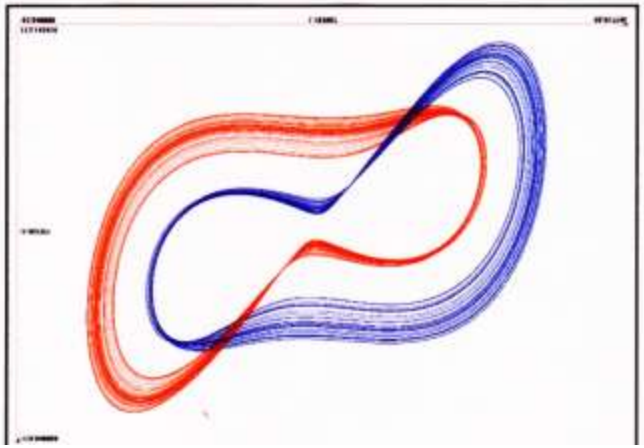
Система Лоренца 1

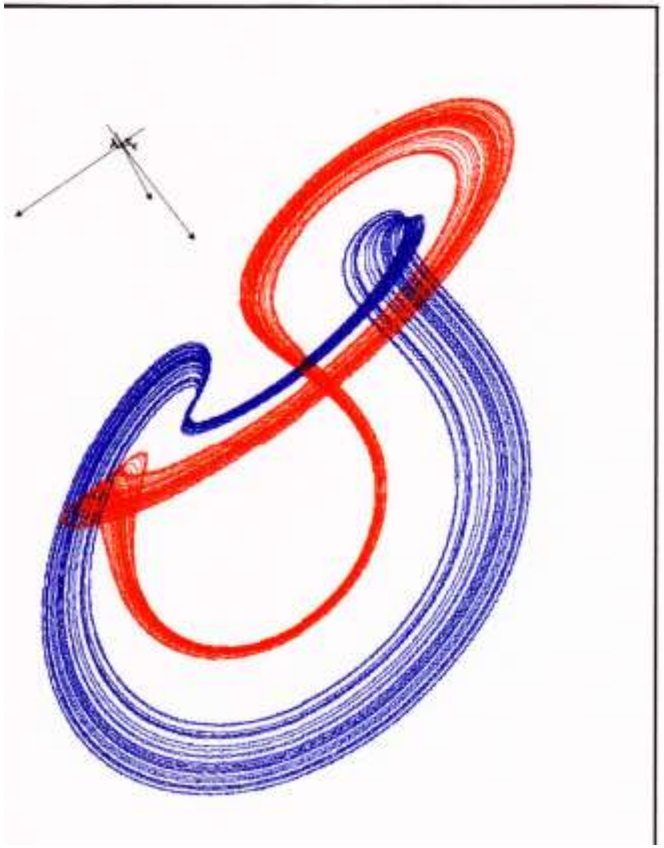
$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

r=28, s=10, b=8/3



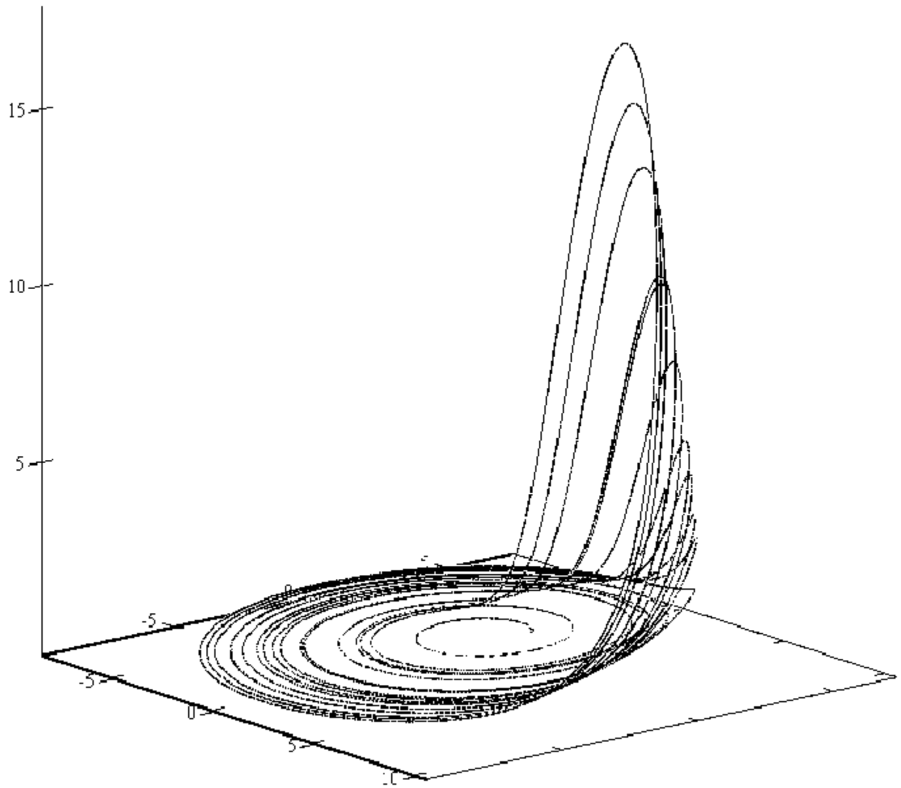






Edward Norton
Lorenz
1917-2008
Американский
математик и
метеоролог
Один из основателей
теории хаоса

Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



$$\dot{x} = -(x + y),$$

$$\dot{y} = x + \alpha\, y,$$

$$\dot{z} = \alpha + z(x - \mu\,).$$

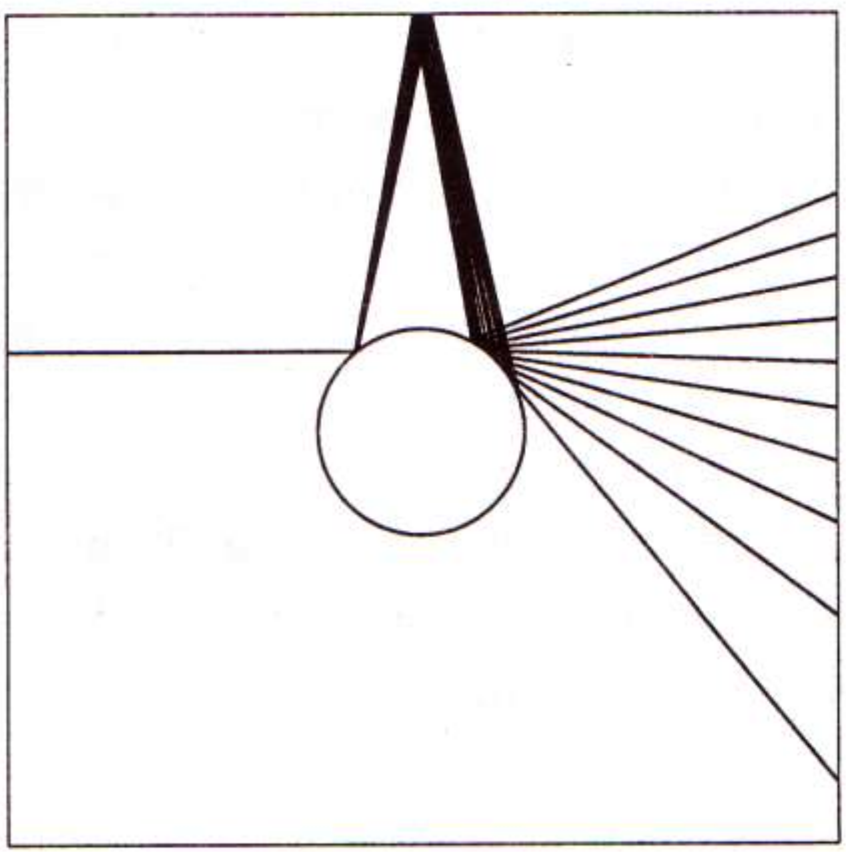
Хаотическое поведение возникает

- • не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- • не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- • не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Разбегание траекторий

Потребность в определенности –
естественная биологическая
потребность человека,
но она же – порок мышления

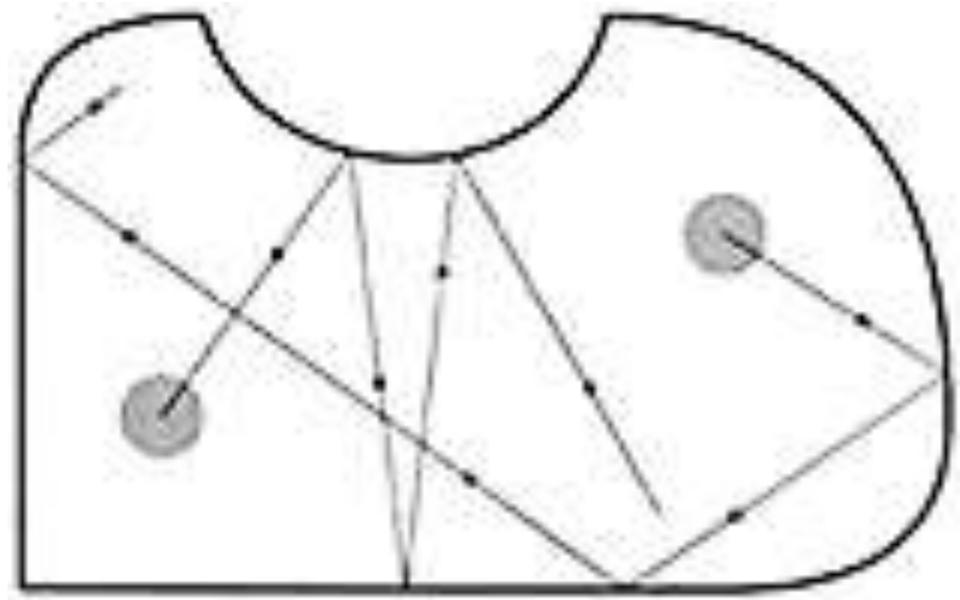


Из книги «Черный лебедь»

Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

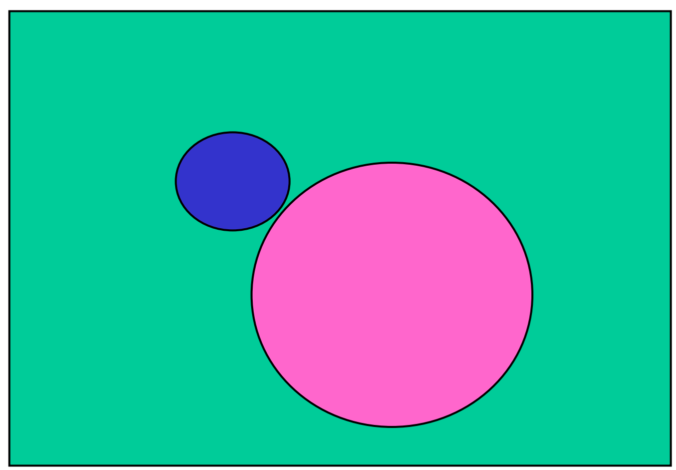
Биллиард Синая

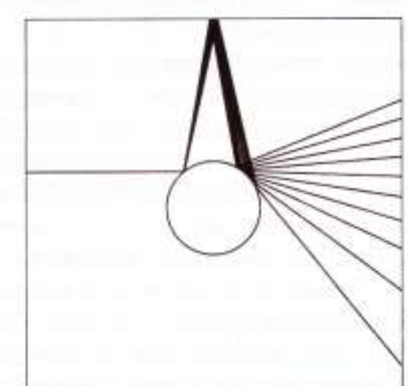


Яков Григорьевич Синай

Лауреат Абелевской премии март 2014 г.

Профессор Мехмата МГУ. Работы по теории динамических систем, статистической физике

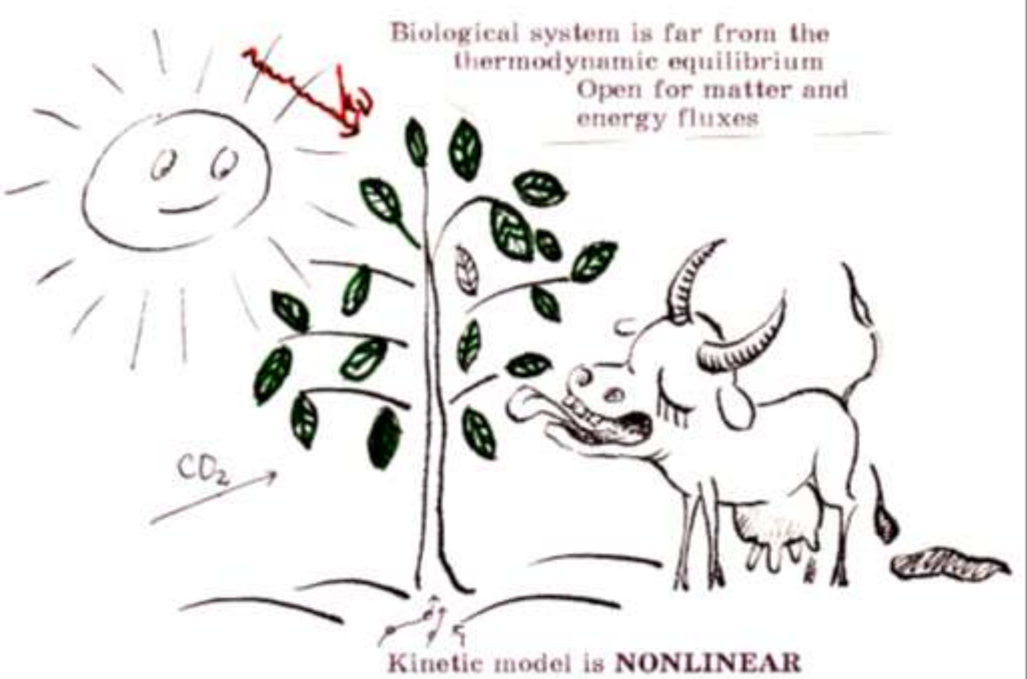




НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (**детерминированного**) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



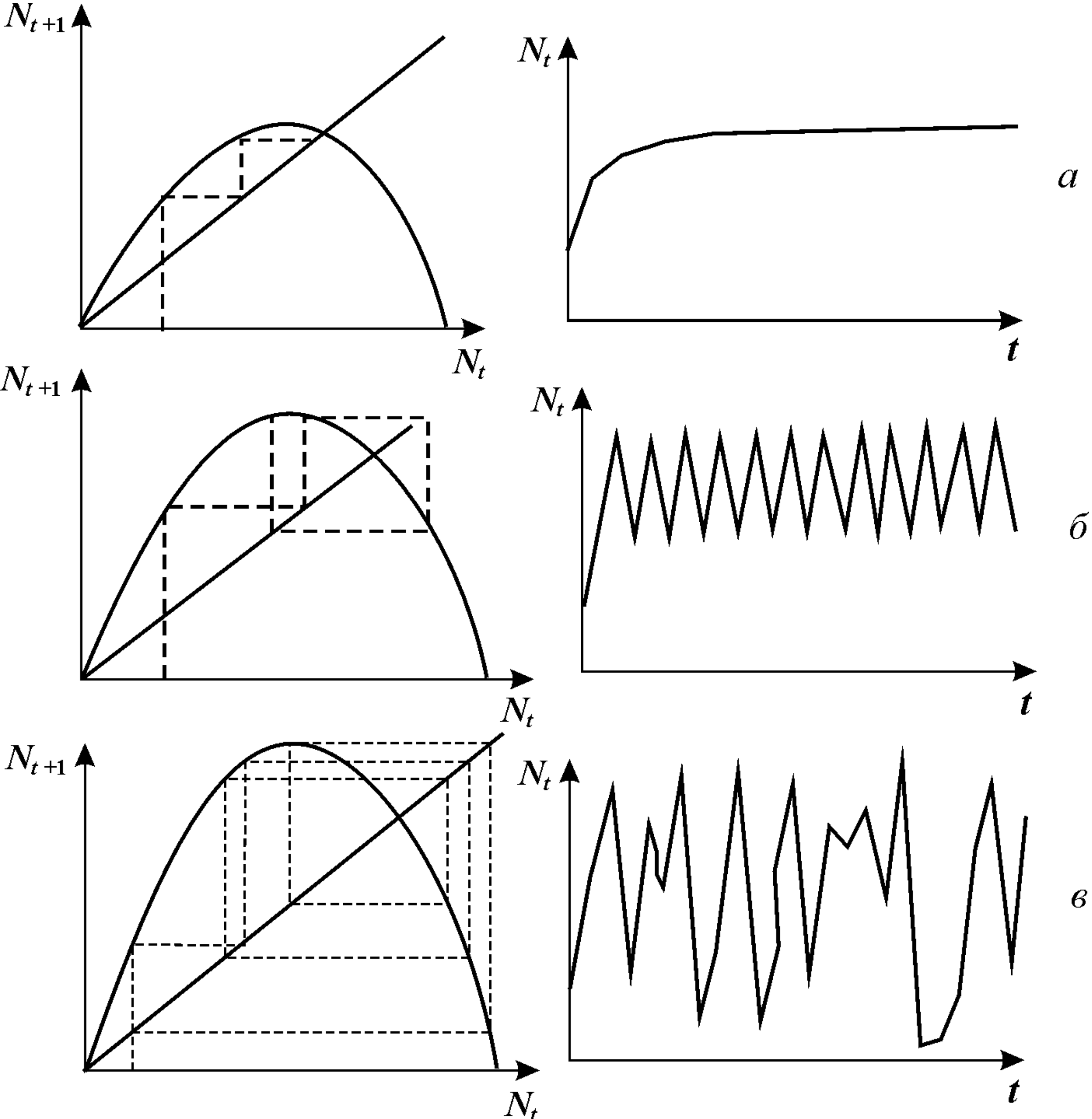
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x\,(t)$ можно записать в виде:

$$x(t) = F\,[x(t_0)]\ .$$

Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.



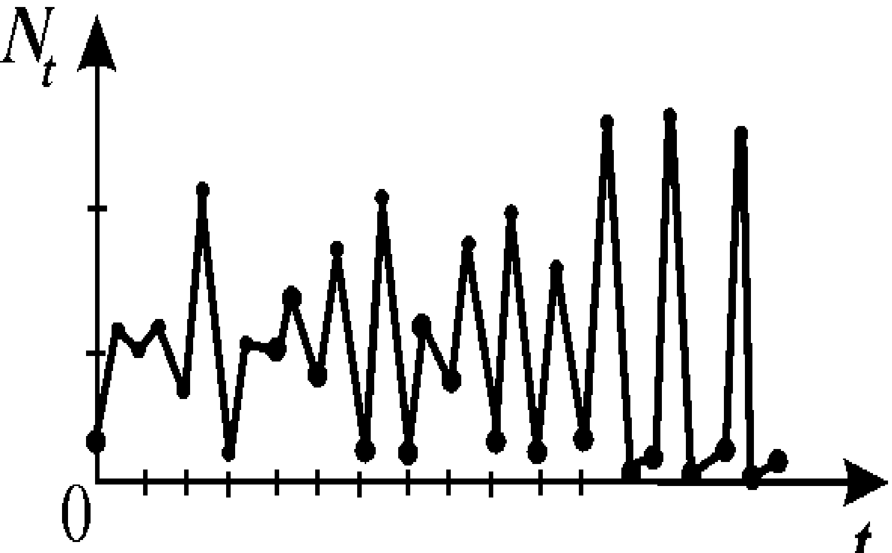
Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

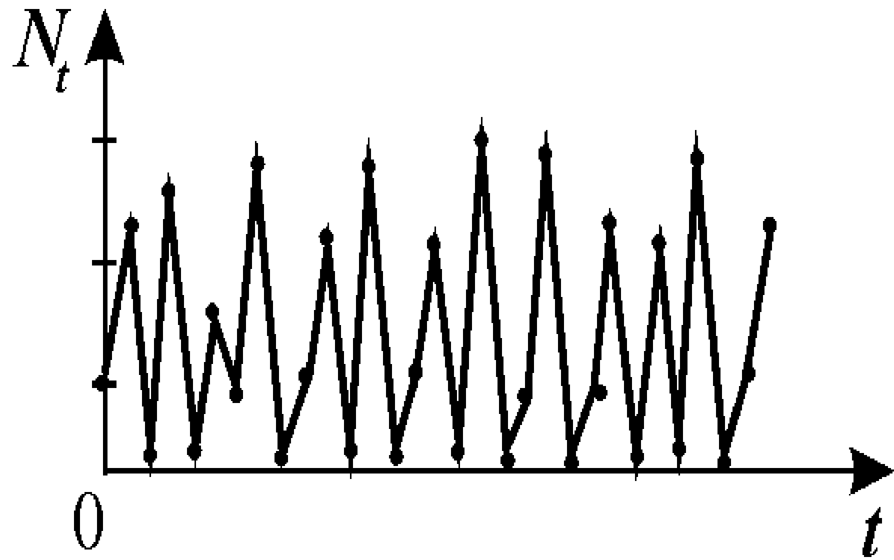
Пример детерминированного хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r(1 - \frac{N_t}{K}) \right\}$$

Дискретный аналог логистического уравнения



а



б

При $r > r_c$=3,102 решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если $0<r<2$,

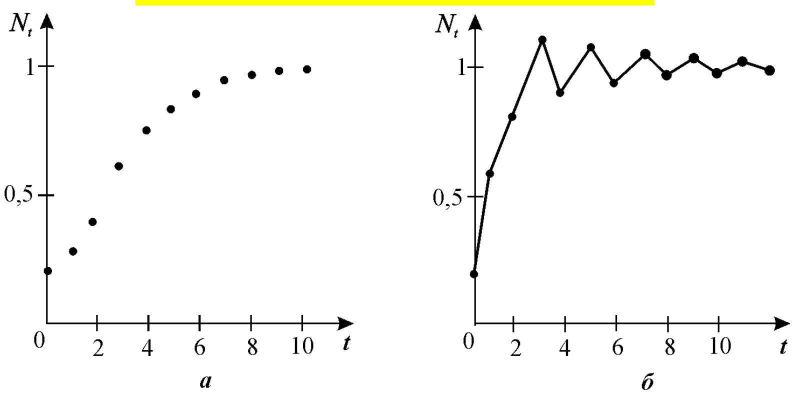
решение *монотонно* при $0 < r < 1$ и представляет собой *затухающие колебания* при $1 < r < 2$

при $2 < r = r_2 < 2{,}526$ – *двухточечные циклы;*

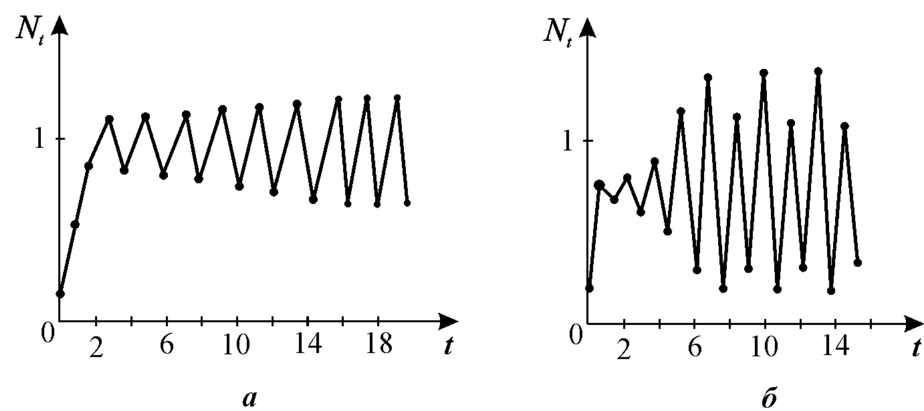
при $r_2 < r < r_c$ появляются *циклы длины 4,8,16,…,2k*

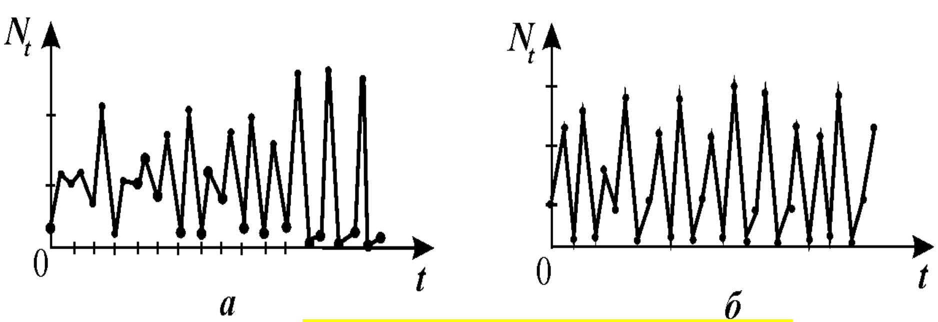
при $r > r_c = 3{,}102$ решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*

Устойчивое решение



Циклы длины 2k

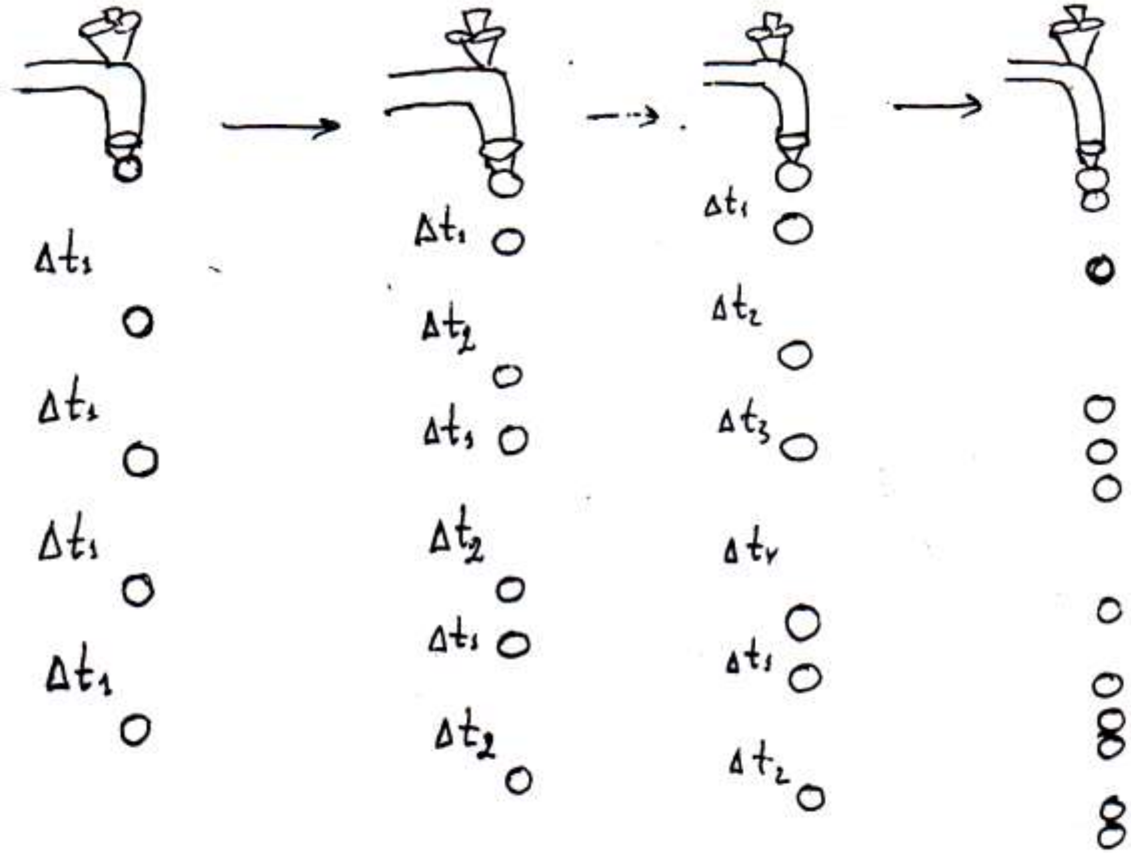




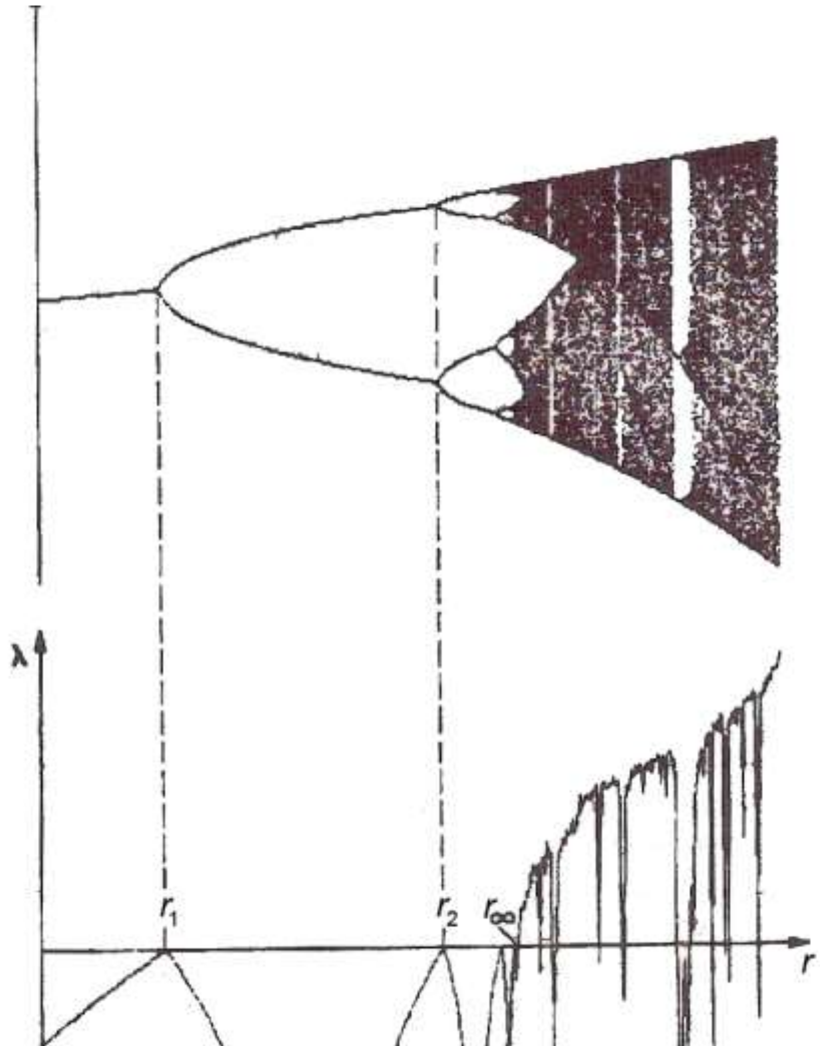
Динамический хаос

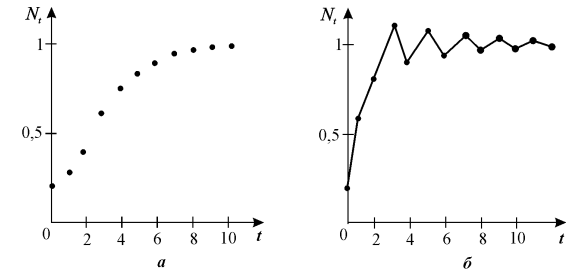
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1-\frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

Переход к хаосу через удвоение периода

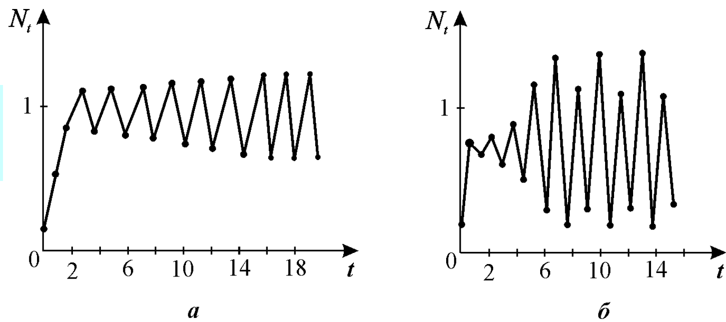


Сценарий удвоения предельного цикла

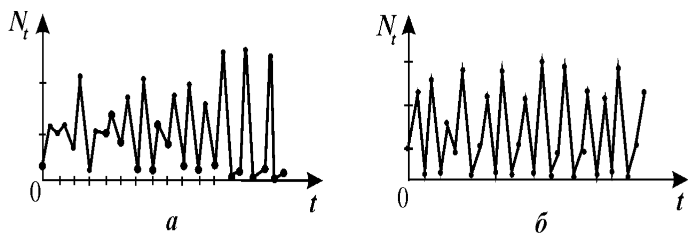




r_1



r_∞



Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \ln\left\| y^i(t) \right\|.$$

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения ρi матрицы линеаризации. Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $y(t^*)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей λi не содержал положительных показателей.

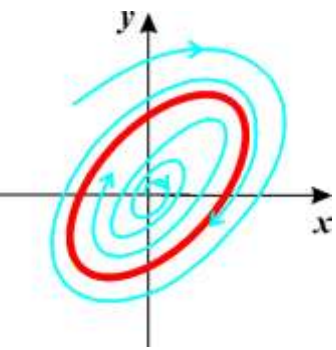
Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon)$, *что для всякого движения* $\mathbf{x}(t)$, *для которого* $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\| < \delta$, *при всех* $t > t_0$ *выполняется неравенство:* $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$.

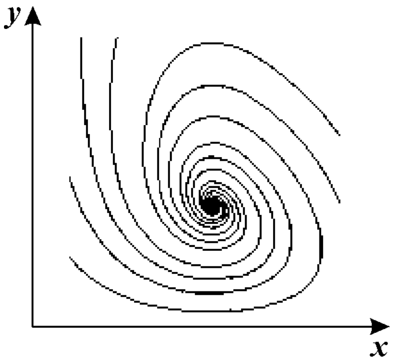
Знак $\|\ \|$ означает норму (длину) вектора.

Устойчивость по Пуассону



предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \to \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать ***периоду*** или ***квазипериоду*** при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.

Аттрактор.

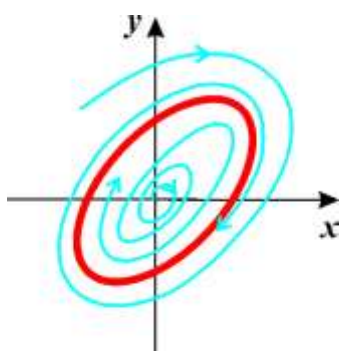


а

Устойчивый фокус

Устойчивый узел

б

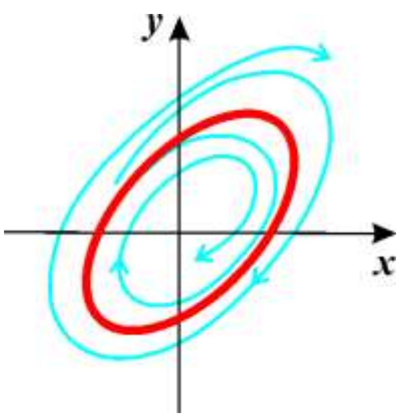


Устойчивый предельный цикл

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \to +\infty$, то L – *притягивающее предельное множество*, или *аттрактор*. Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).

Репеллер

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \to -\infty$, то L – отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.

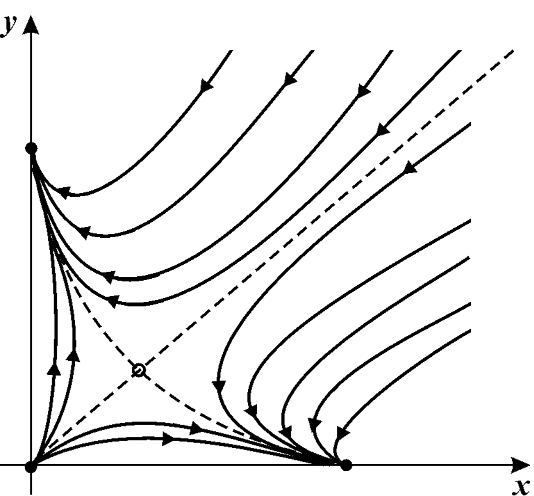


Неустойчивый предельный цикл

Неустойчивый узел,

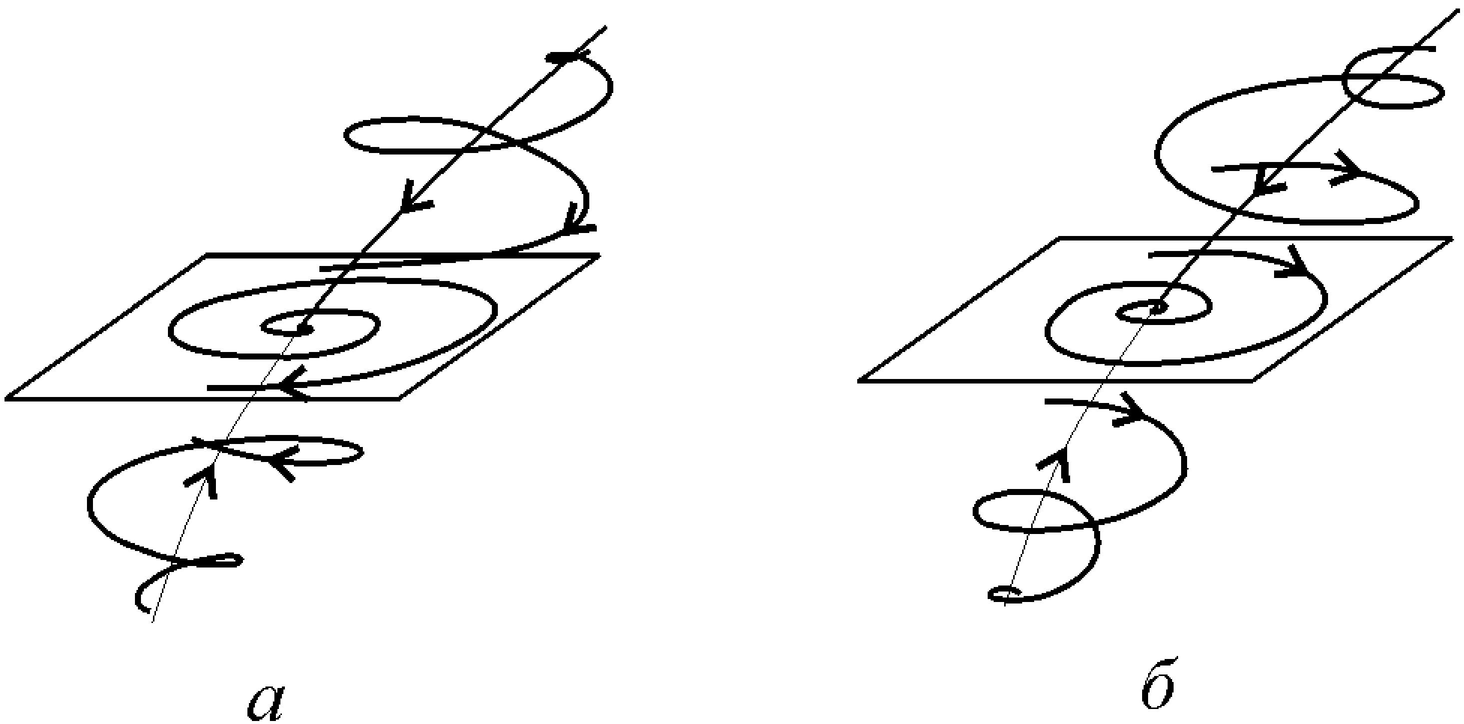
Неустойчивый фокус

Седловое множество



- Если множество V состоит из двух подмножеств $V = W^s \cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s, стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u, стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством (или седлом)*. Множества W^s и W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.

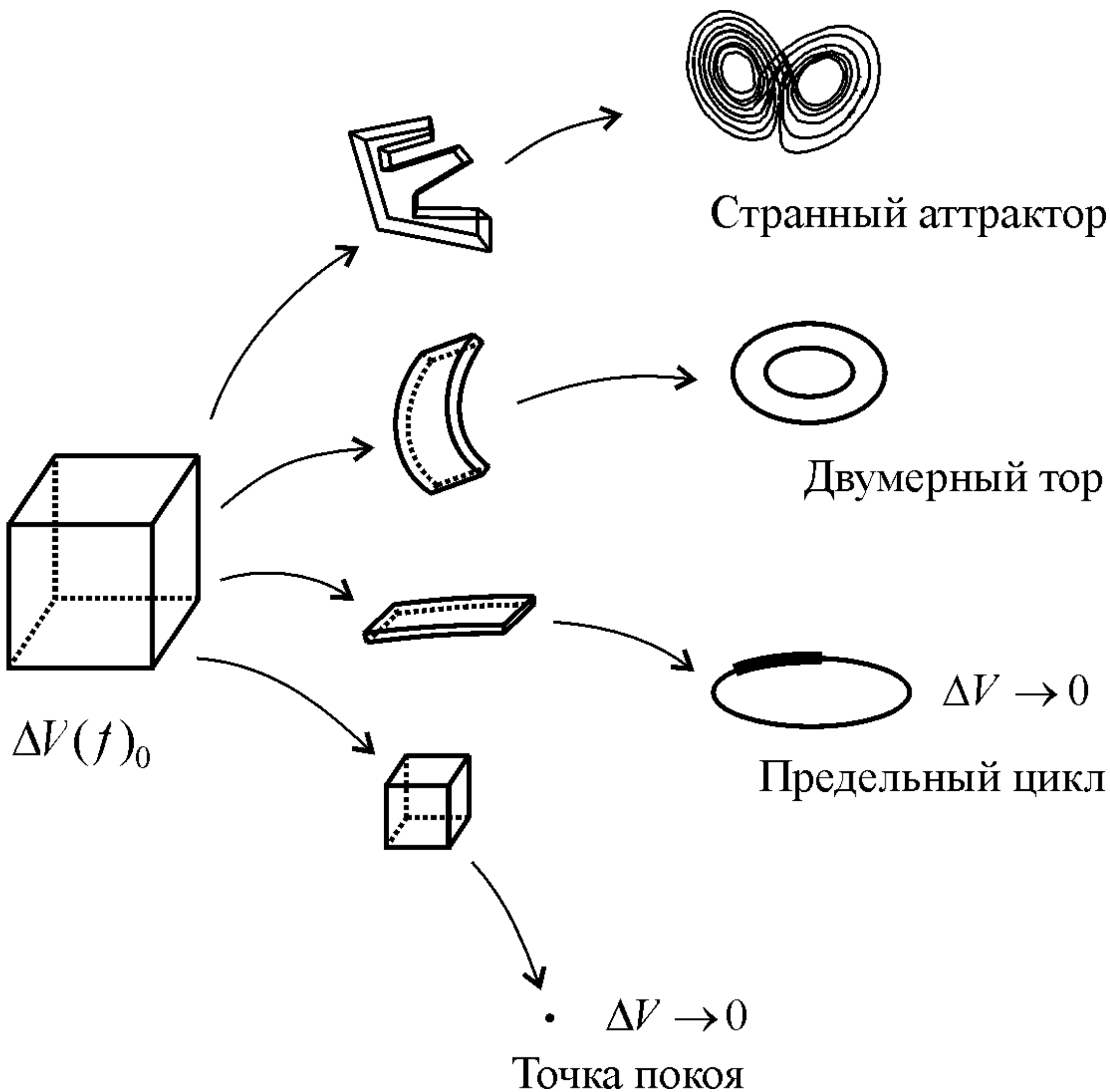
Седло-фокусы



Седло-фокусы в пространстве $N = 3$.

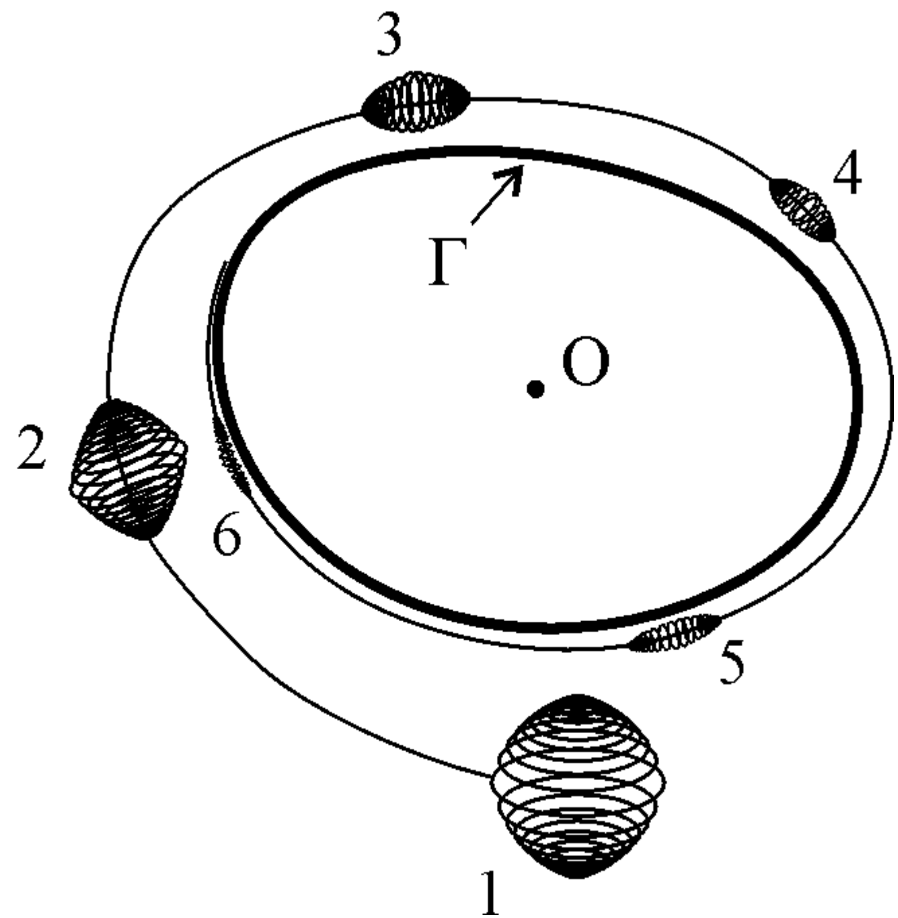
а) p_1 – действительно и отрицательно, $p_{2,3}$ – комплексно сопряженные, $Re\ p_{2,3} > 0$; *б*) p_1 – действительно и положительно, $p_{2,3}$ – комплексно сопряженные, $Re\ p_{2,3} < 0$

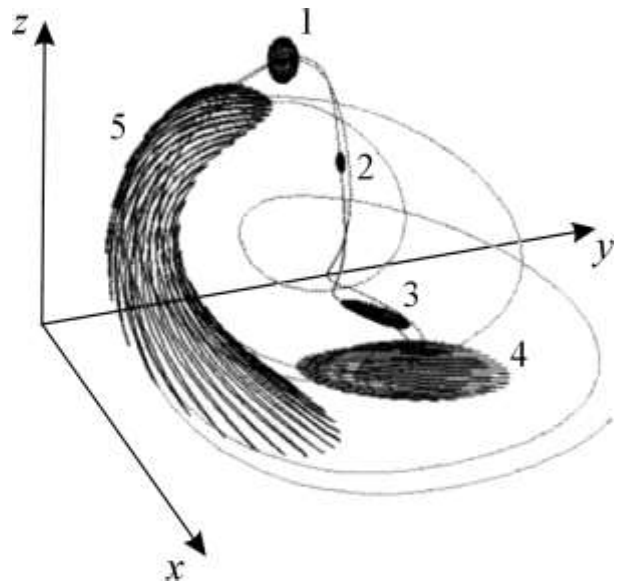
Диссипативные системы

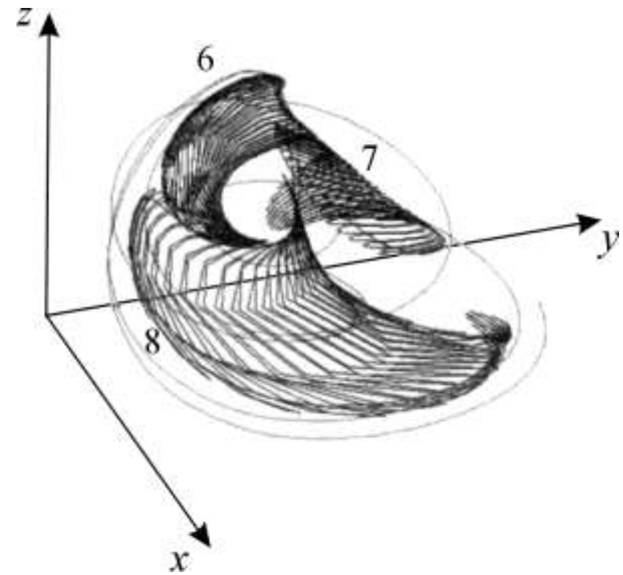


Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

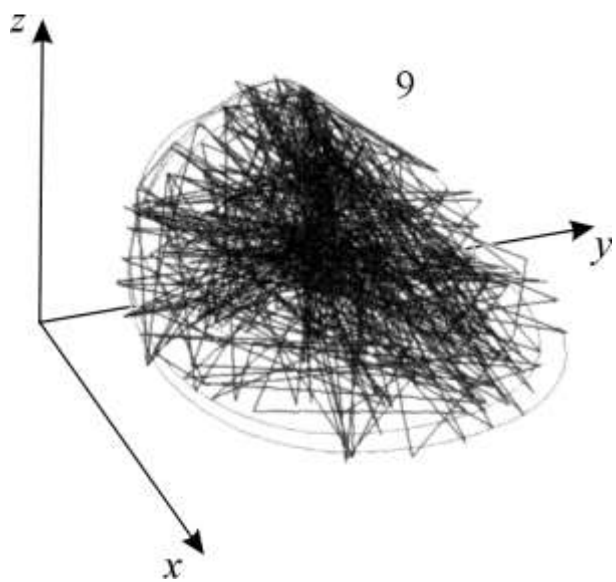
Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε при «наматывании» траектории на устойчивый предельный цикл -траектория Г.







Эволюция малого первоначального фазового объема во времени в динамической системе (Анищенко и др., 1999).



$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием

Безразмерные уравнения гликолиза

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$ Ф6Ф

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(x - \frac{1+r}{1+ry}\right),$$ ФДФ

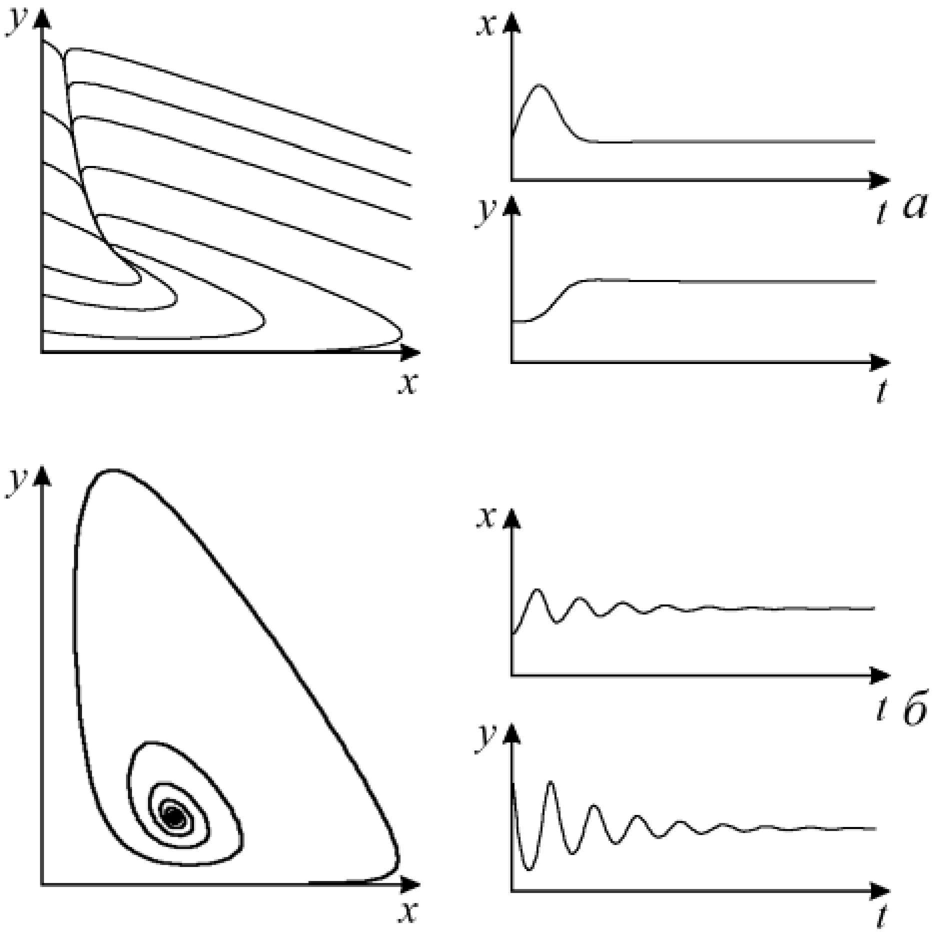
$$\begin{array}{c} \textit{Активация} \\ \downarrow \\ [\text{Гл}] \to \text{Ф6Ф} \to \text{ФДФ} \to \\ (x) \qquad\quad (y) \end{array}$$

$$\alpha = \frac{(q-k)^2 K_{mz} K_{my}}{(K'_{my})^2 k\chi}, \quad r = \frac{k}{q+k}.$$

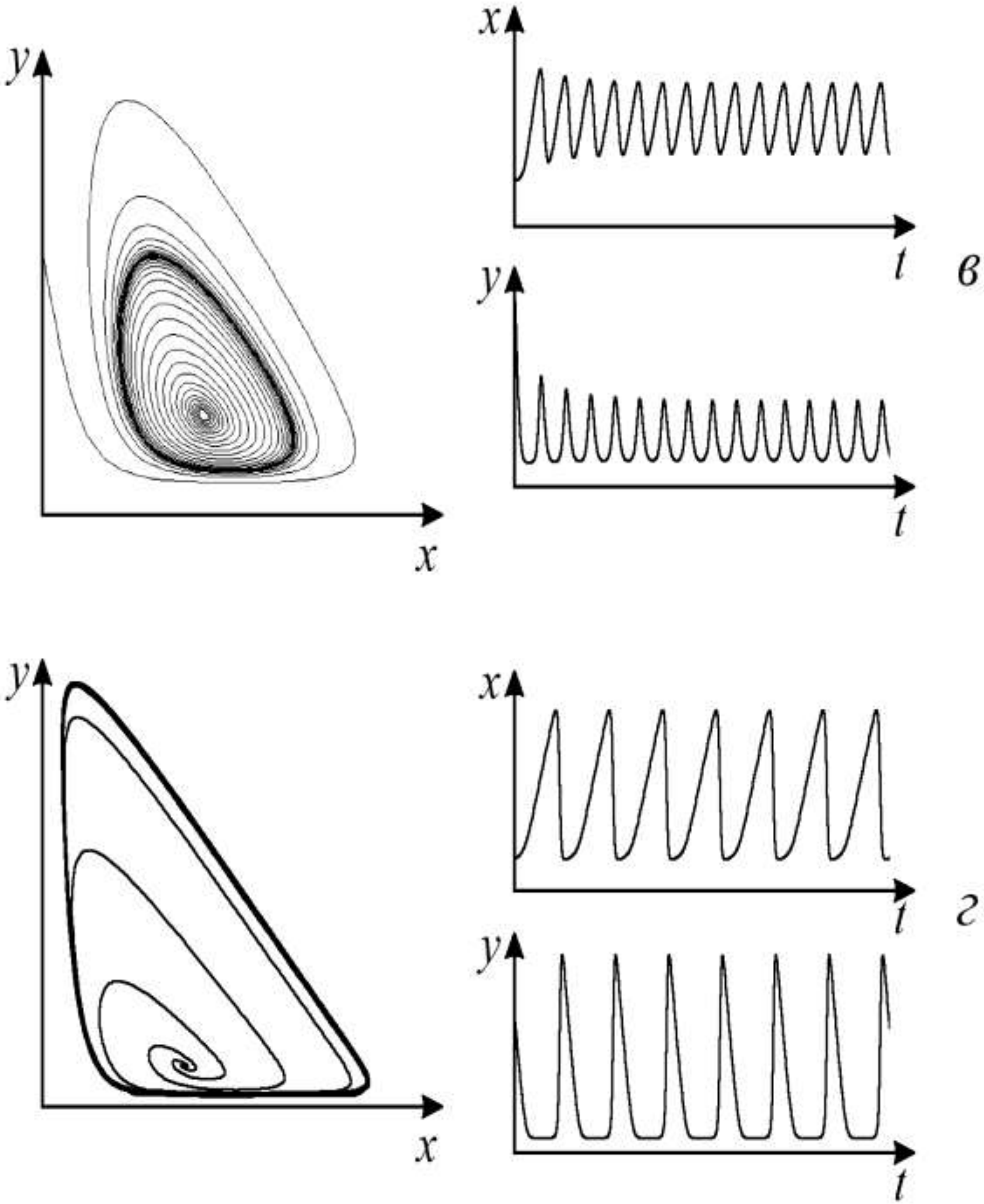
Фазовые портреты и кинетика
Устойчивые узел и фокус

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(x - \frac{1+r}{1+ry}\right),$$



Модель гликолиза (8.10). Кинетика изменений концентраций фруктозо-6-фосфата (x) и фруктозодифосфата (y) (справа) и фазовый портрет системы (слева) при разных значениях параметров системы, *а* – бесколебательный процесс (узел на фазовой плоскости), α = 0.25; r = 1. *б* – затухающие колебания (устойчивый фокус на фазовой плоскости), α = 0.25; r = 0.2.



Предельные циклы в гликолизе

в – колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл на фазовой плоскости), $\alpha = 6$; $r = 0.24$.

г – релаксационные колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл почти треугольной формы на фазовой плоскости), $\alpha = 8$; $r = 0.5$.

$\bar{V}_{in}$

Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\frac{d[F6P]}{dt} = \frac{d[PEP]}{dt} + \frac{d[ATP]}{dt}$$

$$= \bar{V}_{in} + A \sin \omega_e t - V_{PFK}$$

$$\frac{d[ADP]}{dt} = -\frac{d[ATP]}{dt} = V_{PFK} - V_{PK}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

$\bar{V}_{in}$ - the mean input flux

ω_e - frequency of the periodic input flux

$$A = \bar{V}_{in}$$

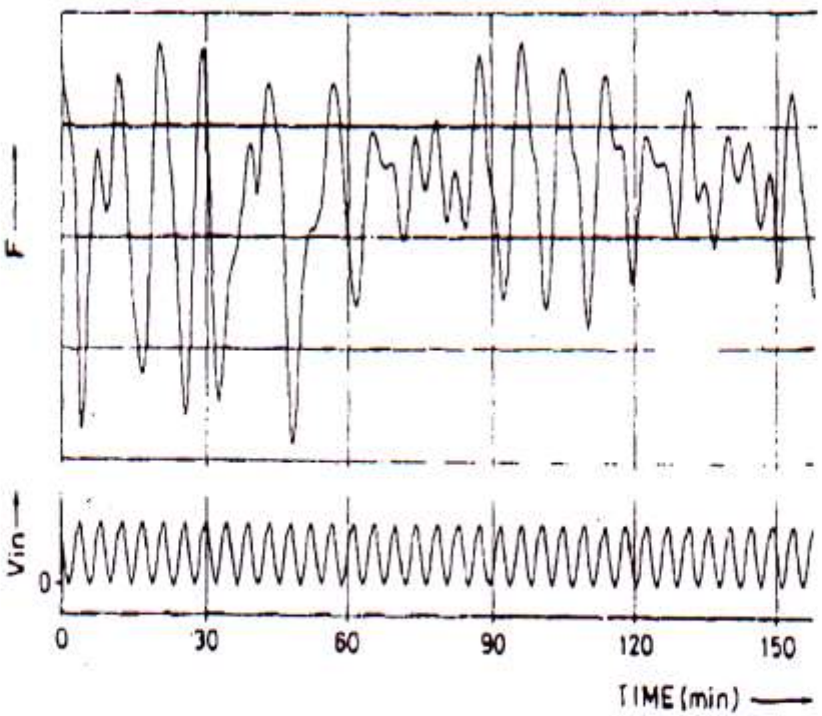


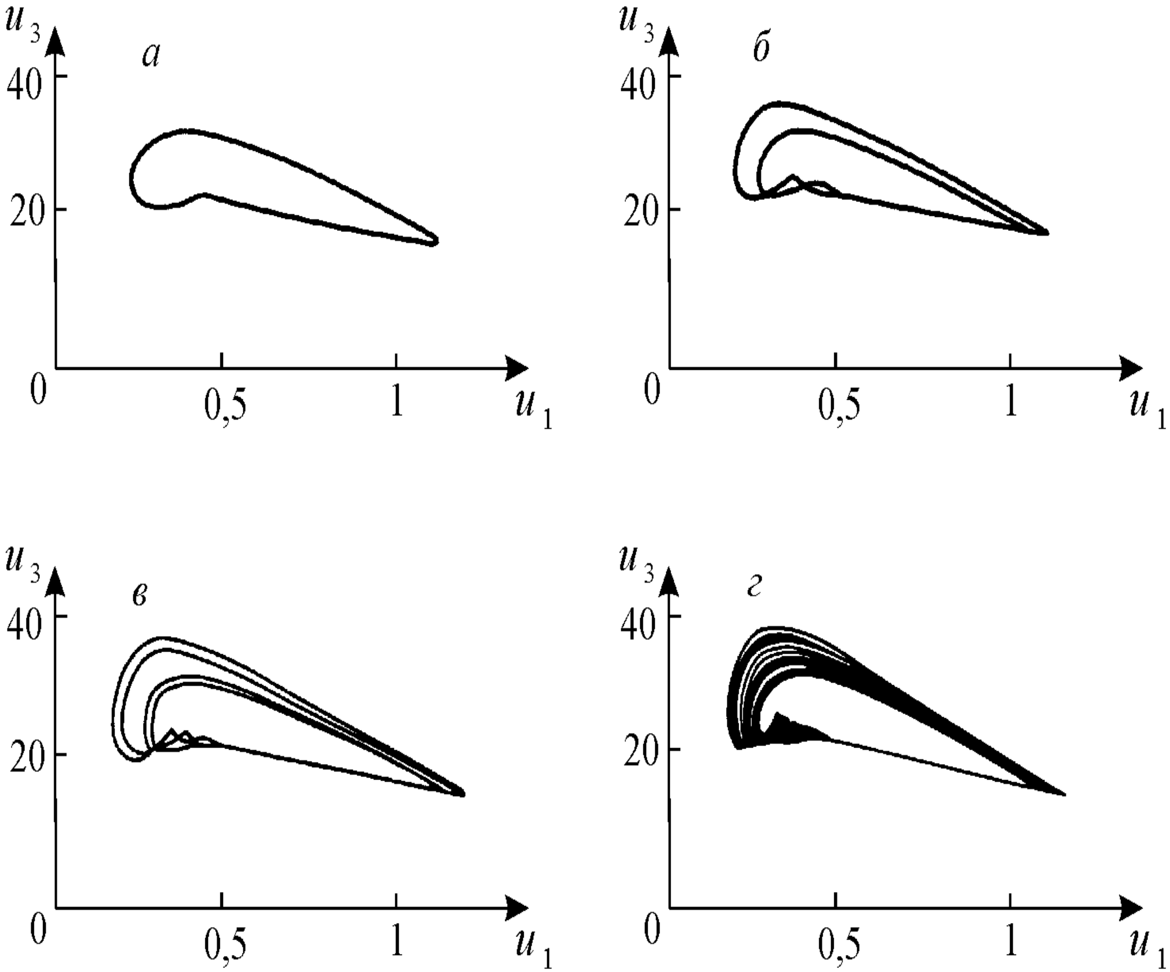
Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).

Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. Основы теории сложных систем

ИКИ-РХД, 2007

Странный аттрактор в системе хищник – две жертвы



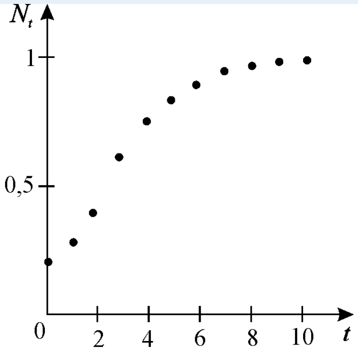
$$\frac{du_1}{dt} = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3),$$

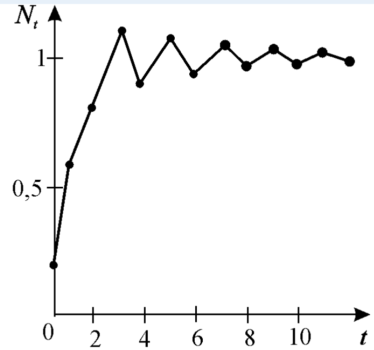
$$\frac{du_2}{dt} = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3),$$

$$\frac{du_3}{dt} = u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апонина, Ю.Апонин, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $а - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

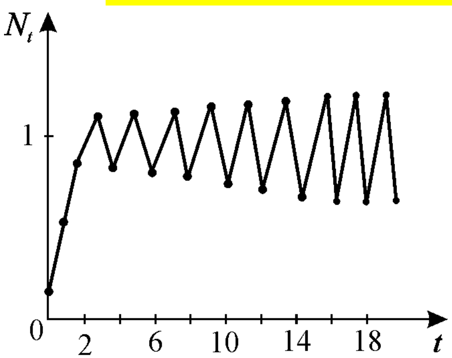
Переход к хаосу через удвоение периода

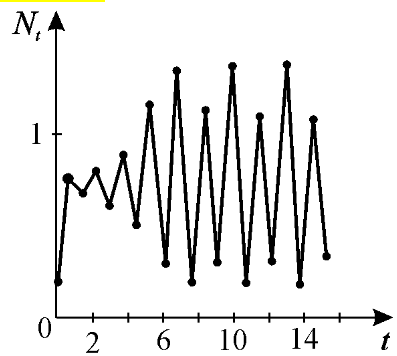




б

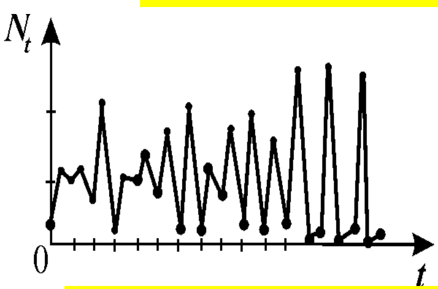
Устойчивое решение

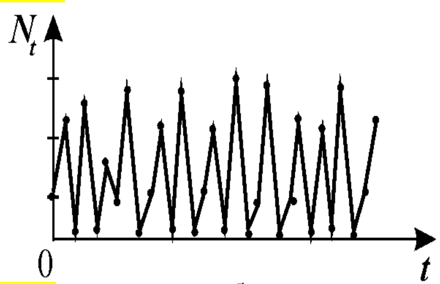




б

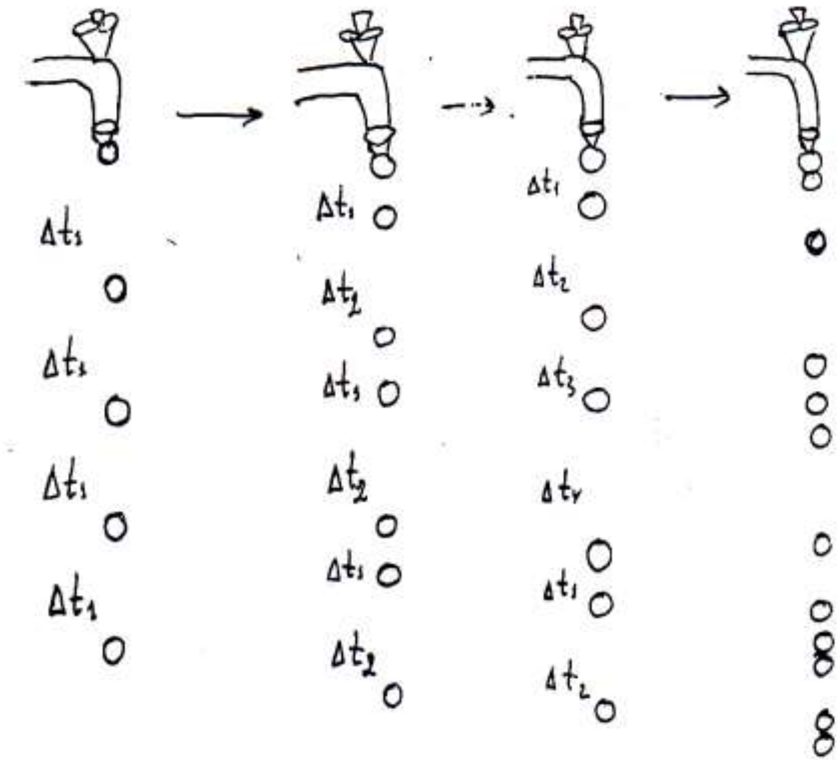
Циклы длины 2k





б

Динамический хаос



$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$