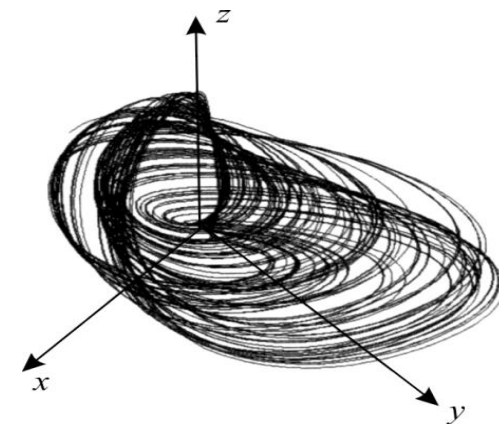
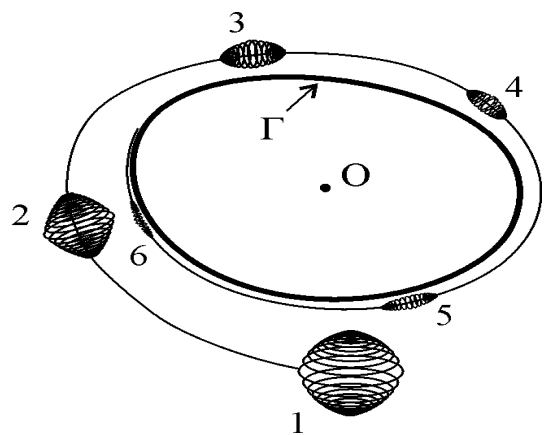




Динамический хаос



Триумфы XX века

Теория относительности

Квантовая механика

Теория Хаоса

Хаос

Беспорядок, неразбериха,
смешение

Бесформенная
совокупность материи и
пространства
(Противоположно Космосу –
упорядоченности).

Все рождается из Хаоса
(древнегреческое)

χαος



Созвездие стрельца
Фото Роберта Гендлера

Динамический хаос

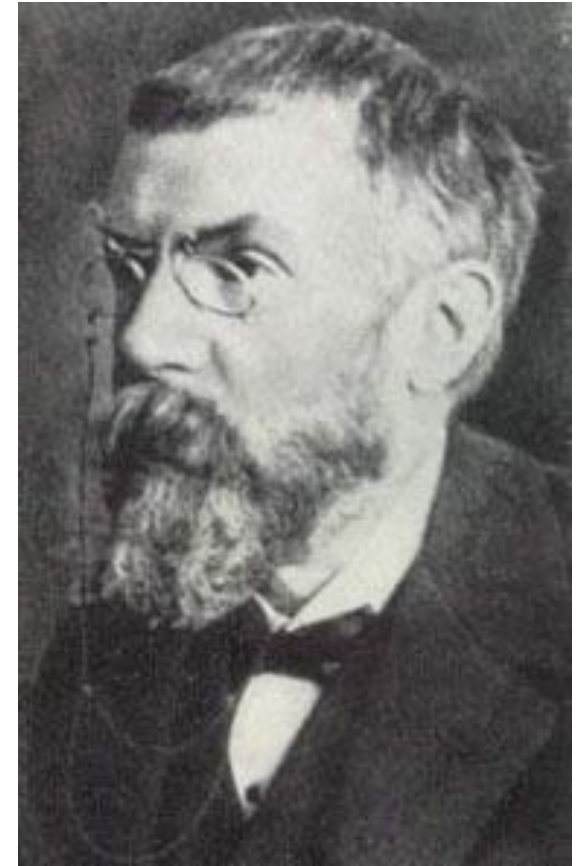
Основные понятия

- Предельные множества
- Странные аттракторы
- Размерность странных аттракторов
- Фракталы

Анри Пуанкаре —

великий французский математик в книге «Наука и метод»
в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».



Детерминированные системы

Однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

$$x(t) = F[x(t_0)]$$

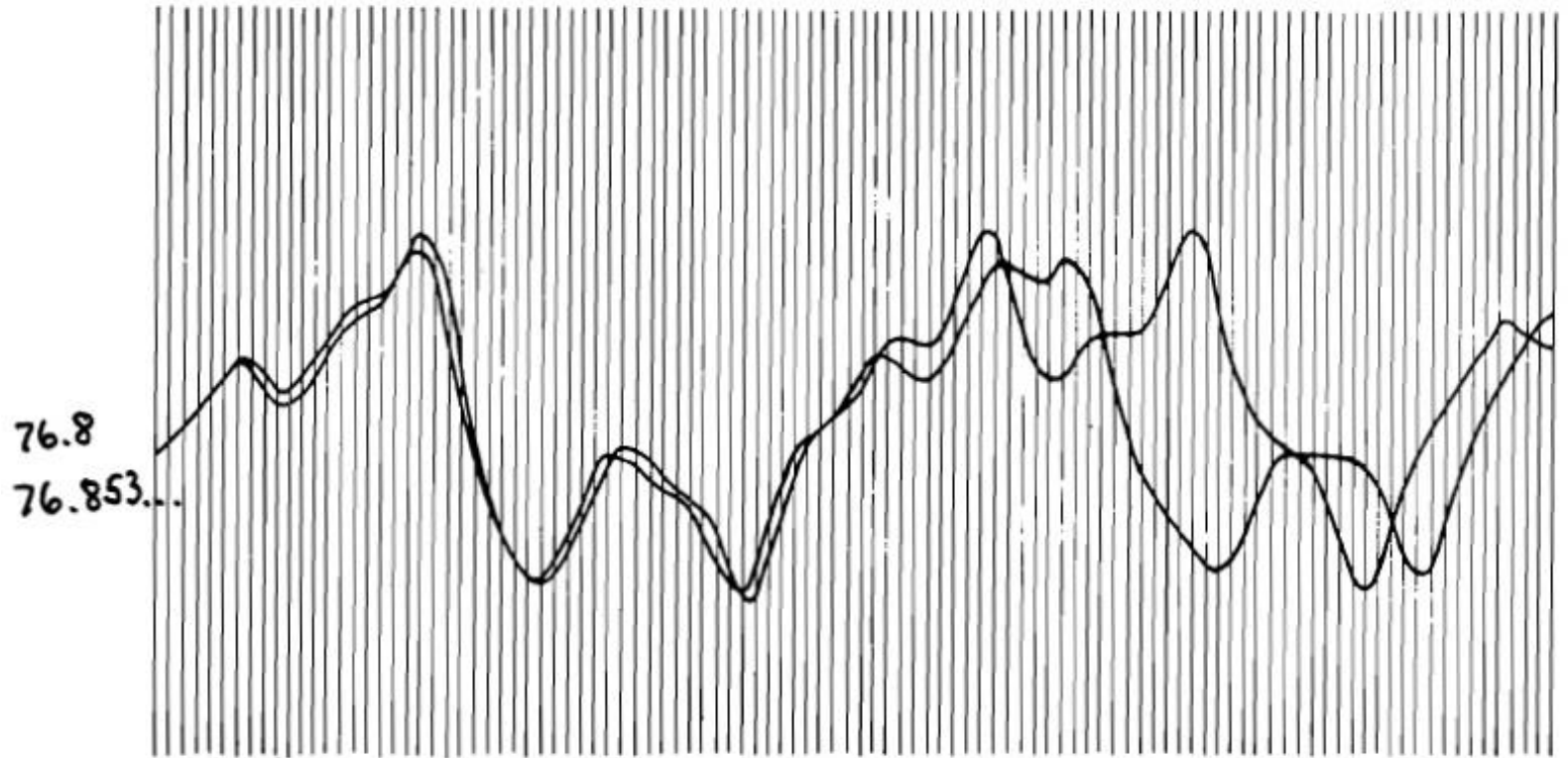
Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

Непредсказуемость



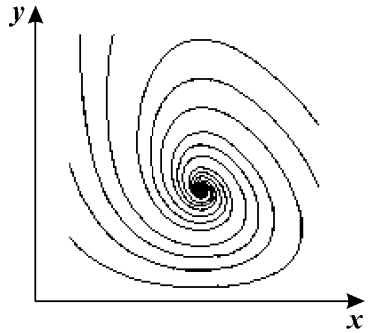
Edward Norton Lorenz
1917-2008

Американский математик и метеоролог
Один из основателей теории хаоса



J.Atmos. Sci: 20, 131-141(1963)

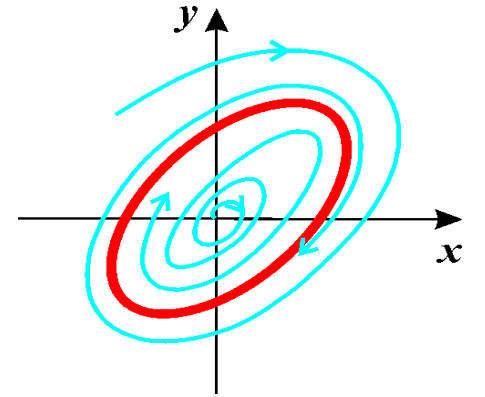
Аттрактор Лоренца



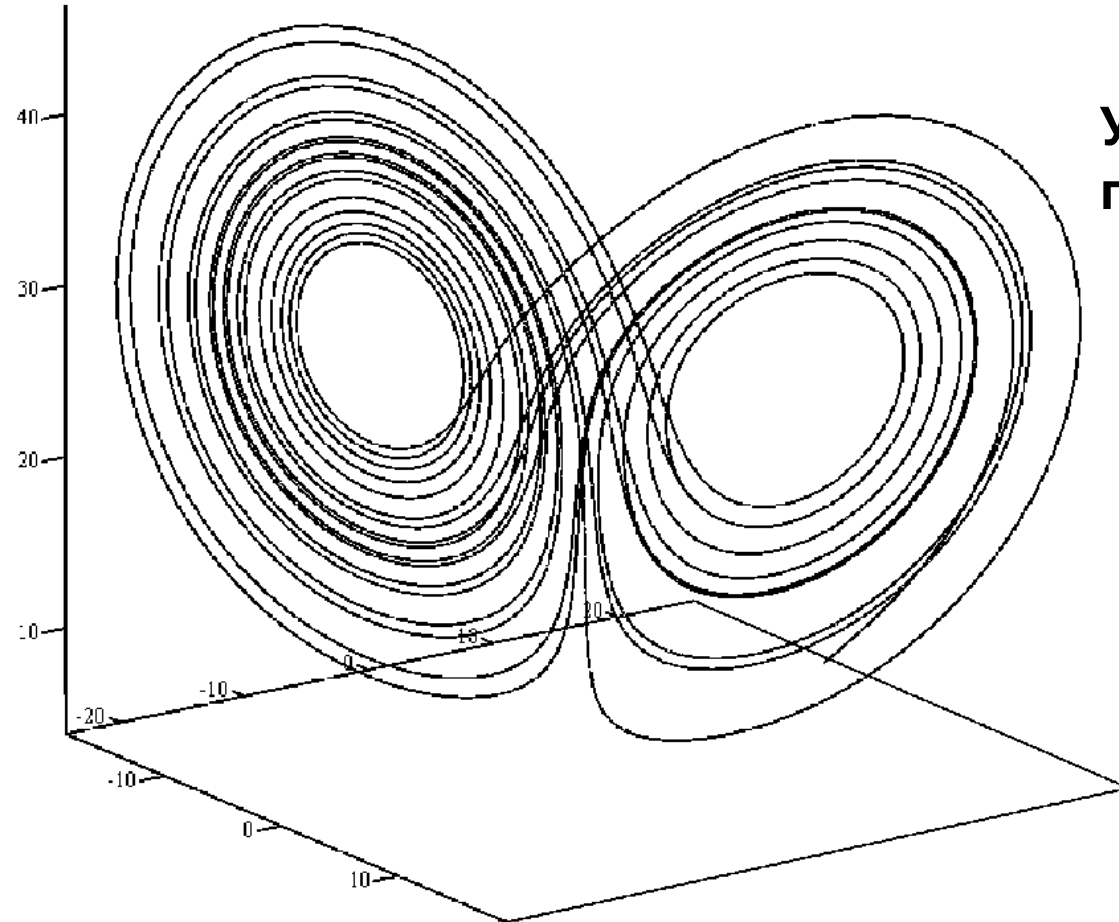
Устойчивый фокус

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

$$r = 28, s = 10, b = 8/3$$



Устойчивый
предельный цикл



Странный
аттрактор

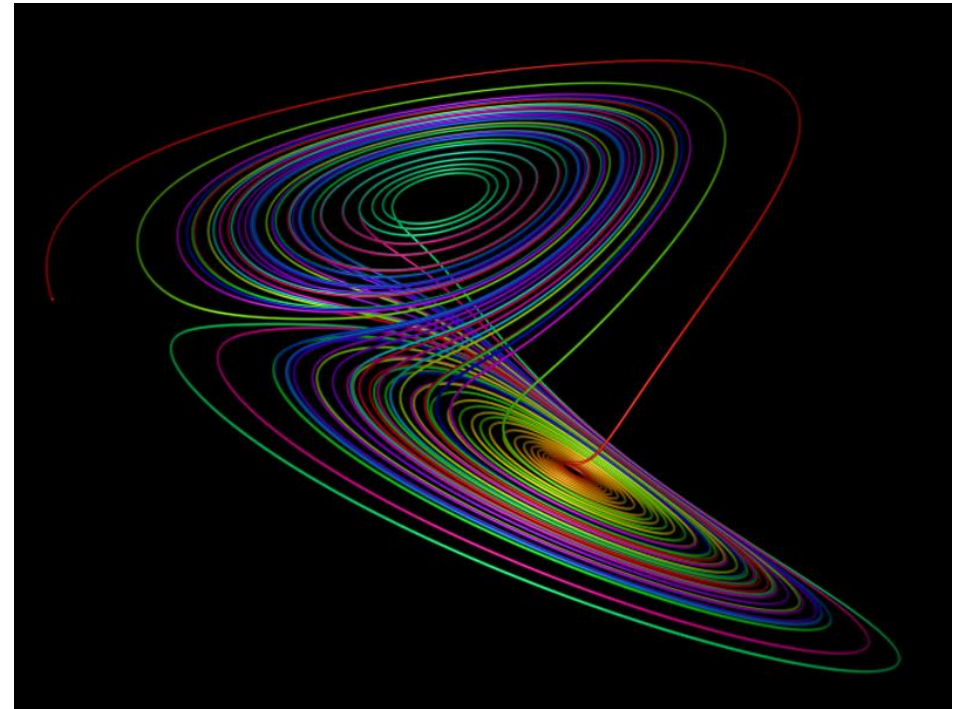
Хаотические траектории в системе Лоренца

Аттрактор Лоренца

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

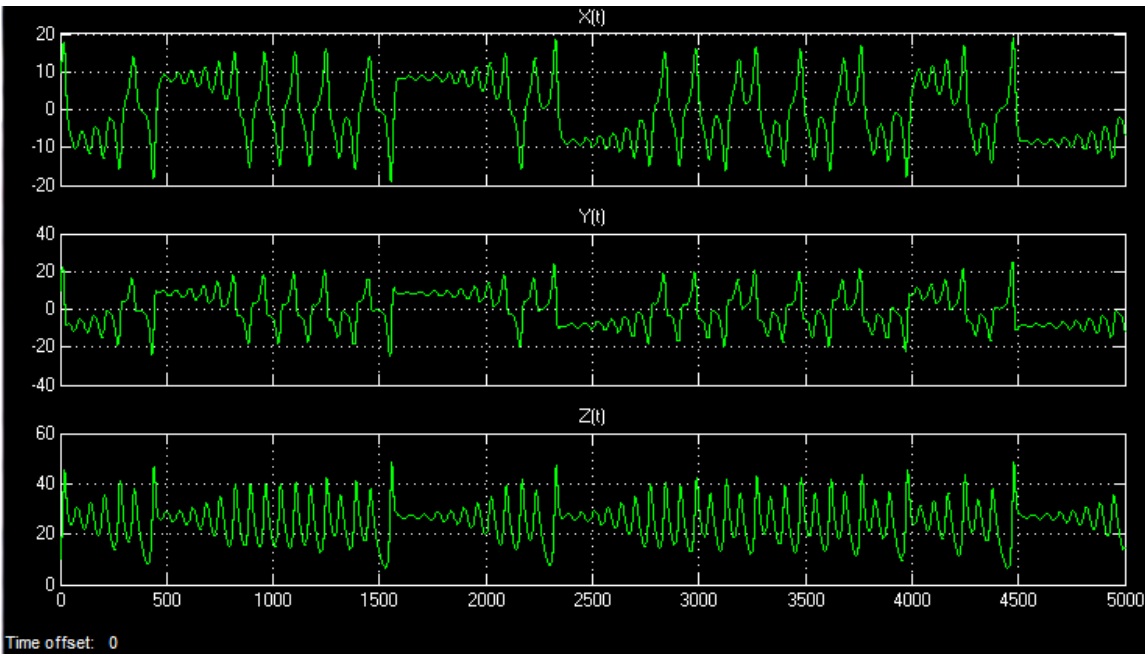
$$\dot{z} = xy - bz$$



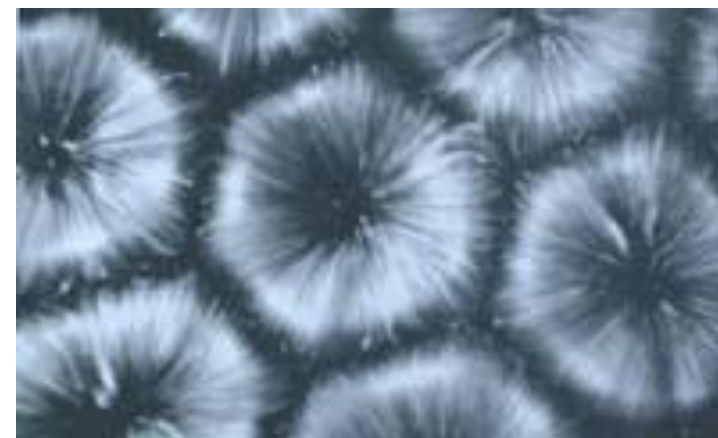
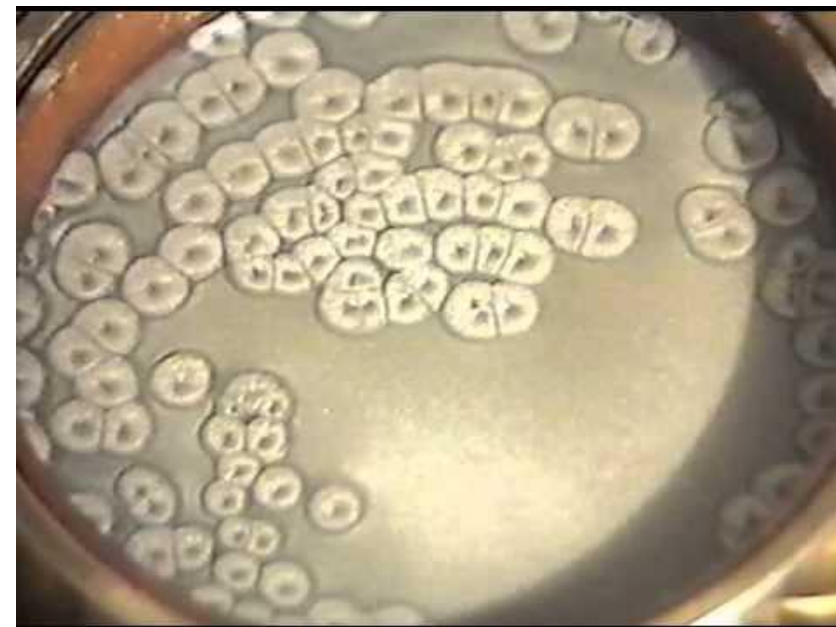
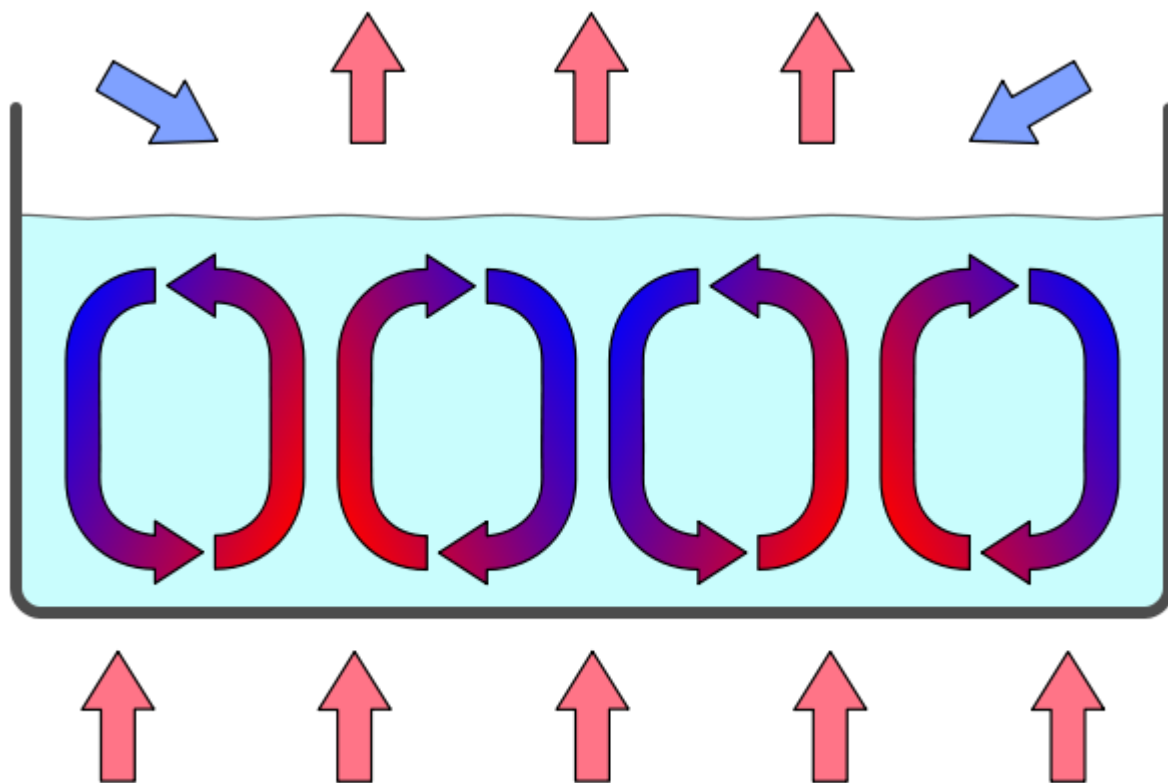
«Эффект бабочки»

«Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?»
Лоренц, 1972

$$r = 28, s = 10, b = 8/3$$



Ячейки Бенара



Тепловая конвекция в подогреваемом снизу горизонтальном слое вязкой жидкости

Ячейки Бенара

Однородность



Структуры



Турбулентность
Хаос

Система
Лоренца

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Аттрактор Лоренца



Edward Norton Lorenz
1917-2008

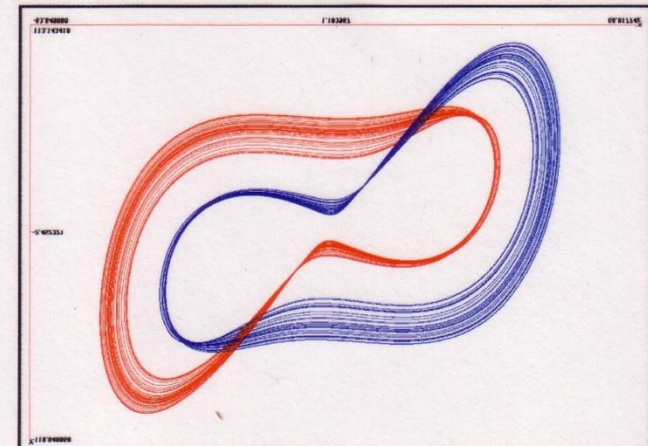
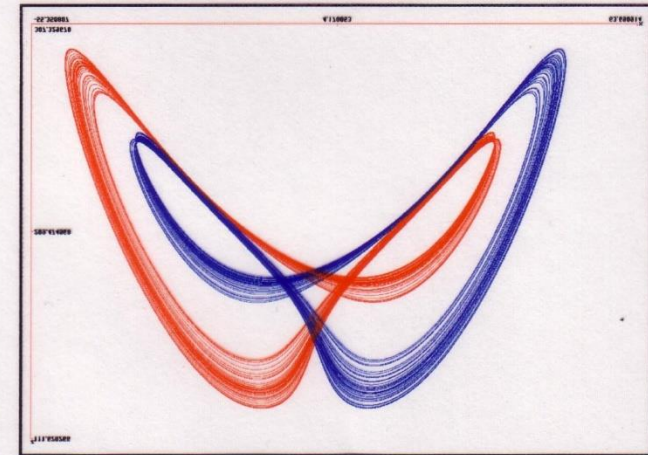
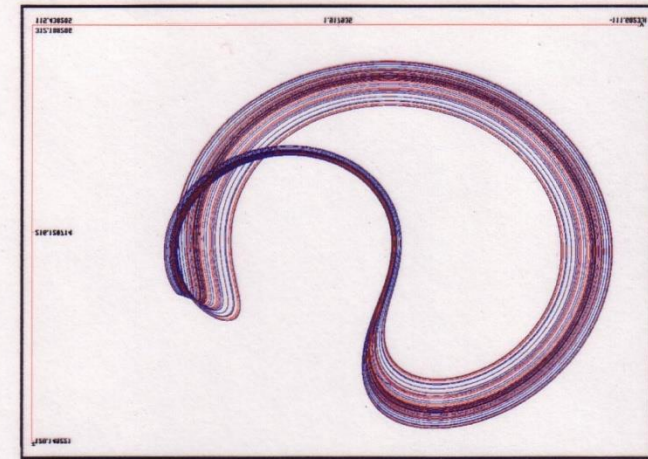
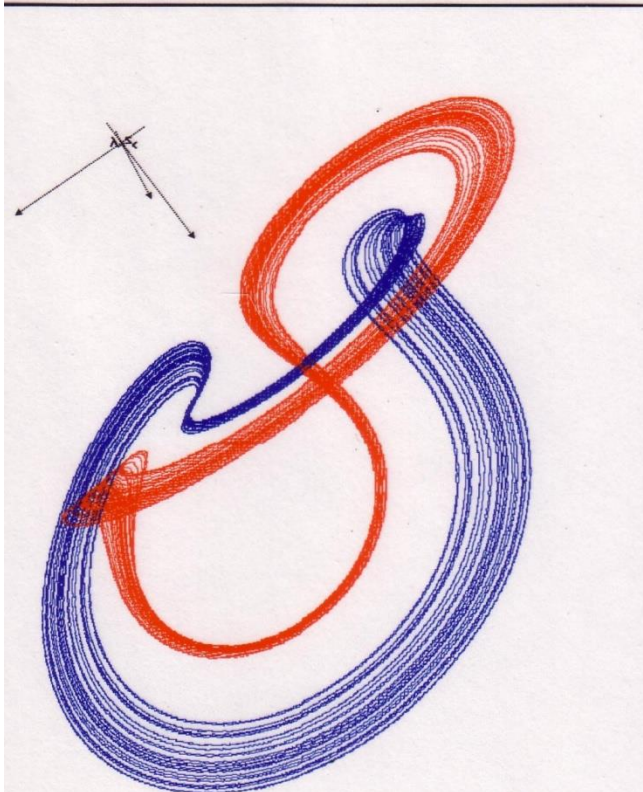
Американский математик и метеоролог
Один из основателей теории хаоса

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$r = 28, s = 10, b = 8/3$$

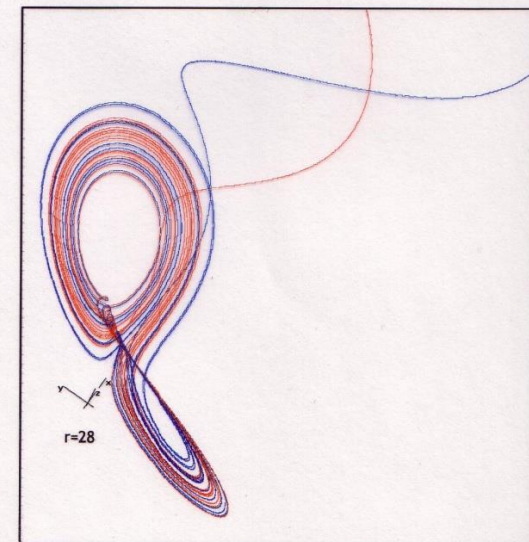
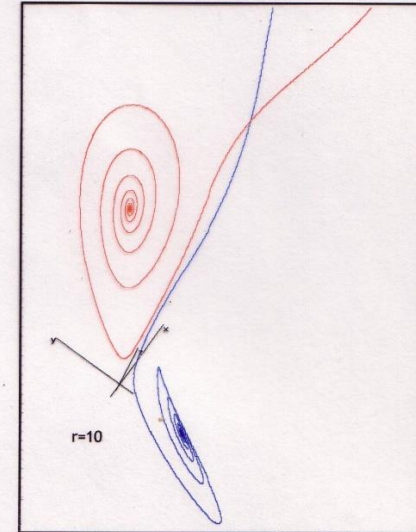
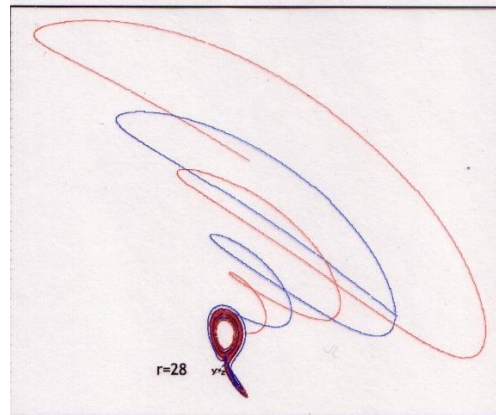
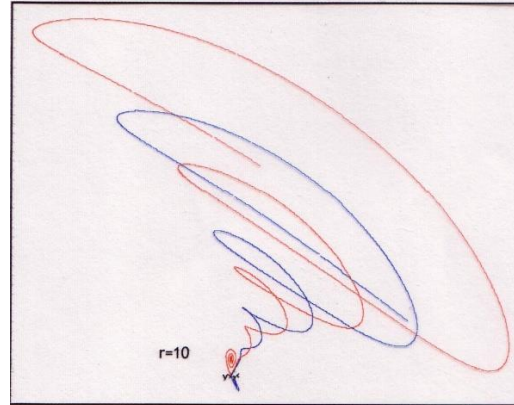
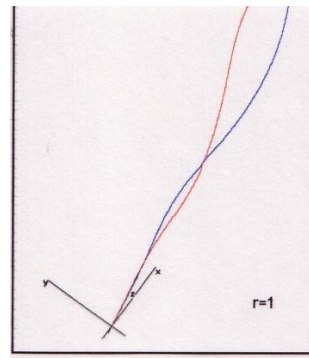


Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра r

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

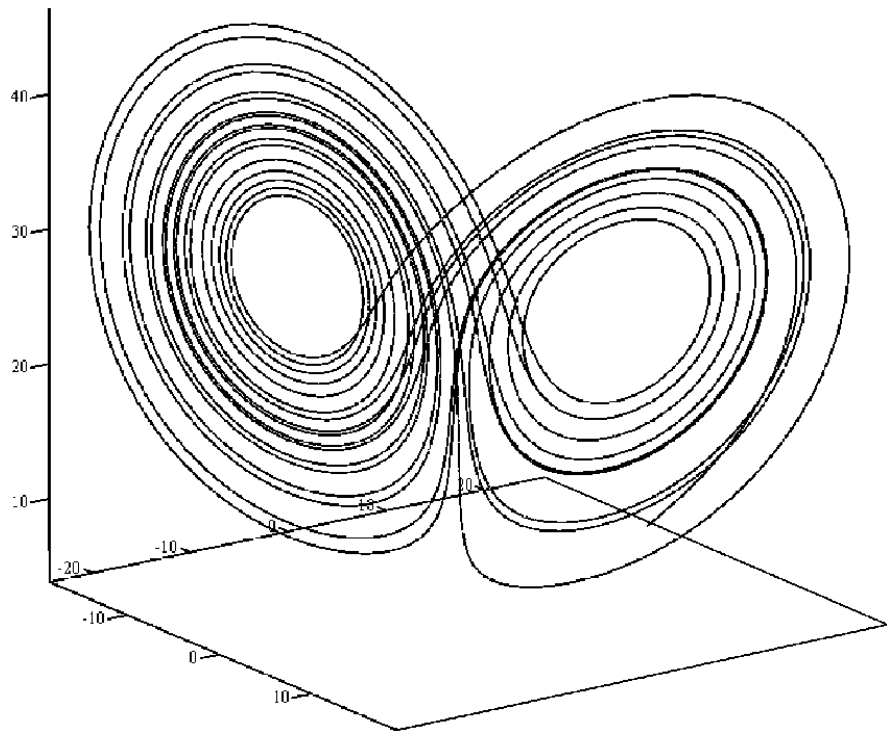


$r = 1$

$r = 10$

$r = 28$

Аттрактор Лоренца

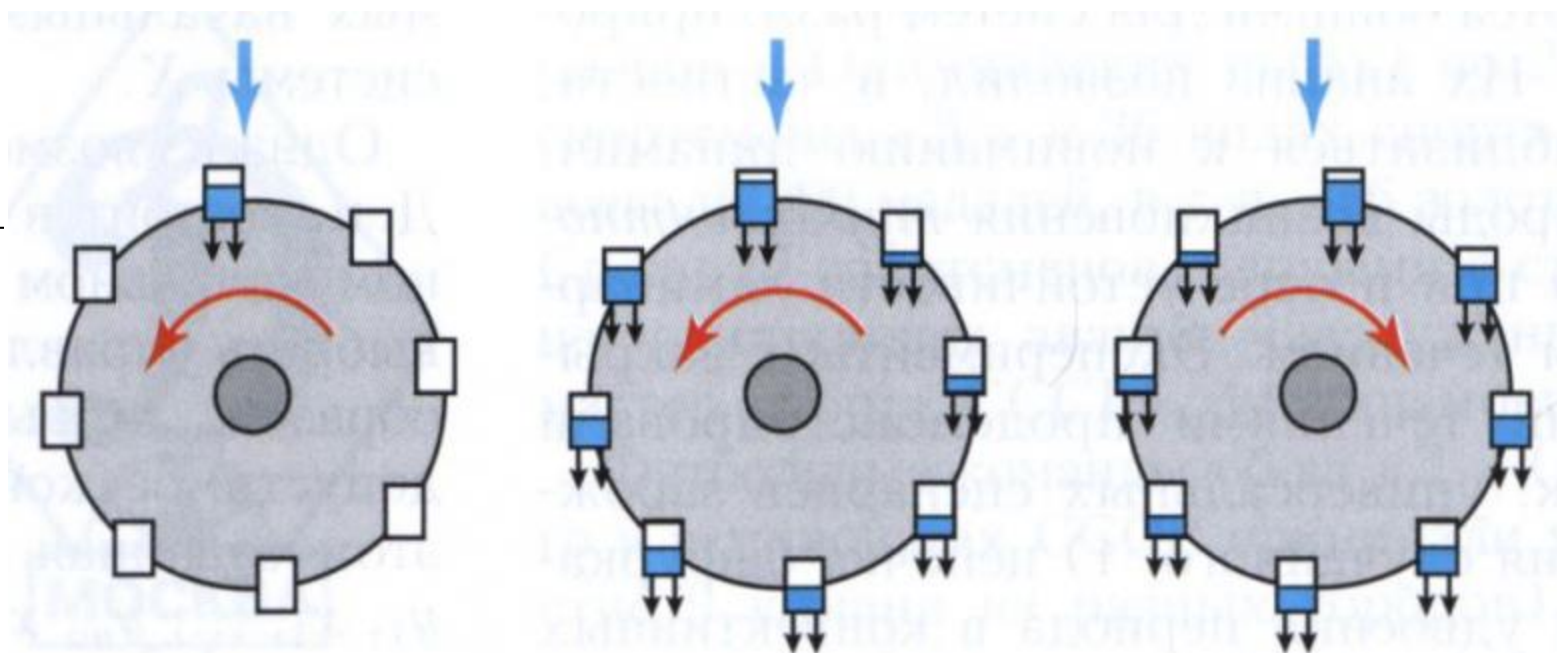


$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

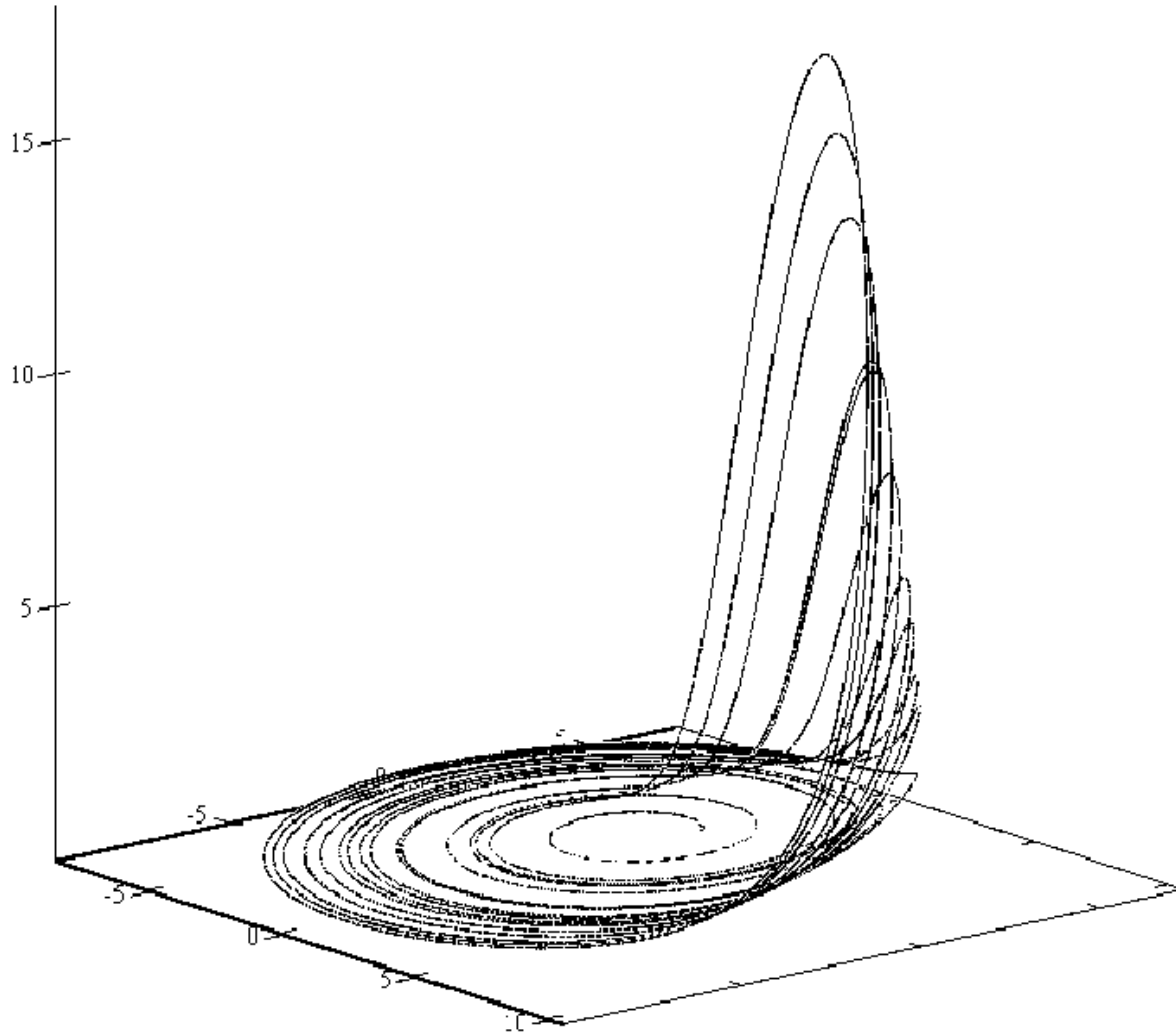
$$\dot{z} = xy - bz$$

Модель водяного колеса



Хаос в непрерывной системе

Аттрактор Ресслера



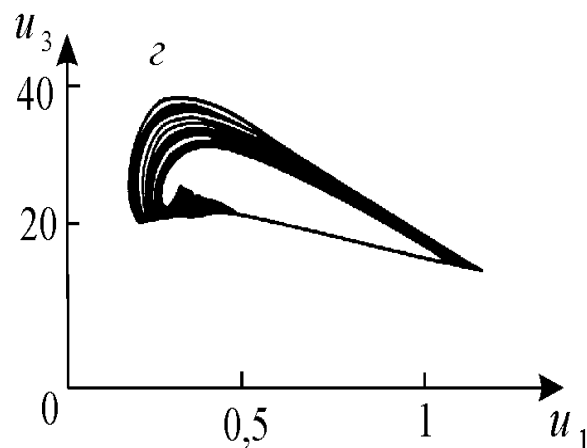
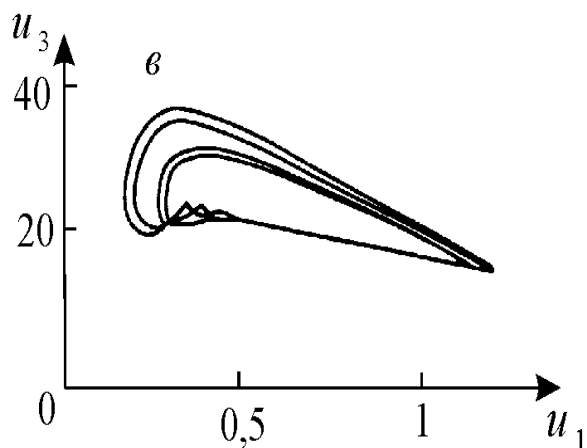
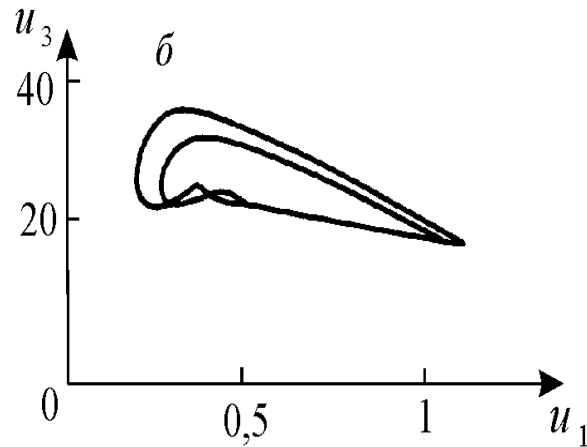
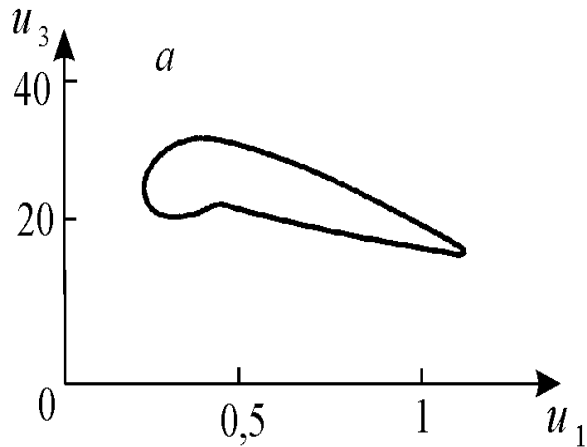
$$\dot{x} = -(x + y)$$

$$\dot{y} = x + \alpha y$$

$$\dot{z} = \alpha + z(x - \mu)$$

Странный аттрактор в системе хищник – две жертвы

(А.Д. Базыкин, Е.Апони́на, Ю.Апони́н, 1985)



$$\frac{du_1}{dt} = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3)$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3)$$

$$\frac{du_3}{dt} = u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3)$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы

При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла)

Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

Странные аттракторы



The Three-Scroll Unified Chaotic System Attractor (tsucs2)

Equations :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y-x)+dxz, \\ \frac{dy}{dt} &= cx-xz+cy, \\ \frac{dz}{dt} &= \beta z+xy-cx^2.\end{aligned}$$

Definitions :

$a, c, \beta, A, \alpha, \zeta$ = equation parameters
 x, y, z = 3D coordinate
 t = time

Parameters :

$a = 40$
 $c = 55$
 $\beta = 1,833$
 $A = 0,16$
 $\alpha = 0,65$
 $\zeta = 20$



The Halvorsen Attractor

Equations :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax-ky-4z-y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -xy-4z-4x-z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -az-4x-4y-x^2.\end{aligned}$$

Definitions :

a = equation parameter
 x, y, z = 3D coordinate
 t = time

Parameters :

$a = 1,4$



The Aizawa Attractor

Equations :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1-\beta)x+dy, \\ \frac{dy}{dt} &= dx+(1-\beta)y, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma xz - \frac{\gamma}{2}(x^2+y^2)(1+cz) + \zeta x^2.\end{aligned}$$

Definitions :

$a, \beta, \gamma, A, \alpha, \zeta$ = equation parameters
 x, y, z = 3D coordinate
 t = time

Parameters :

$\alpha = 0,25$
 $a = 0,55$
 $\gamma = 0,4$
 $\beta = 3,5$
 $\beta = 0,7$
 $\zeta = 0,1$



化宇宙 / quantum-spacetime.lofter.com



The Burke - Shaw Attractor

Equations :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x(x+y), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(xz), \\ \frac{dz}{dt} &= xyz+x.\end{aligned}$$

Definitions :

c, k = equation parameters
 x, y, z = 3D coordinate
 t = time

Parameters :

$c = 10$
 $k = 4,272$



арт-объекты

Хаотическое поведение возникает

- не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца)
- не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца)
- не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические)

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

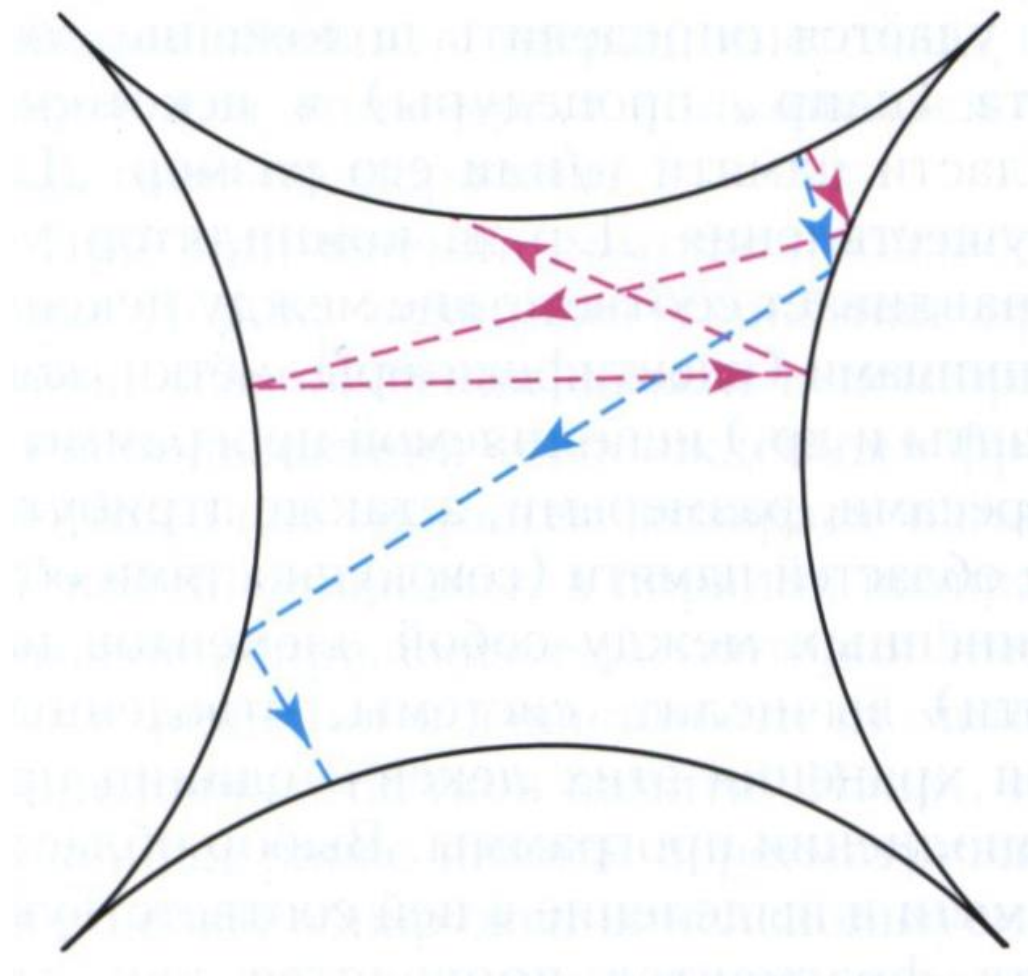


Яков Григорьевич Синай

Лауреат Абелевской премии март 2014 г.

Профессор Мехмата МГУ.
Работы по теории динамических систем,
статистической физике

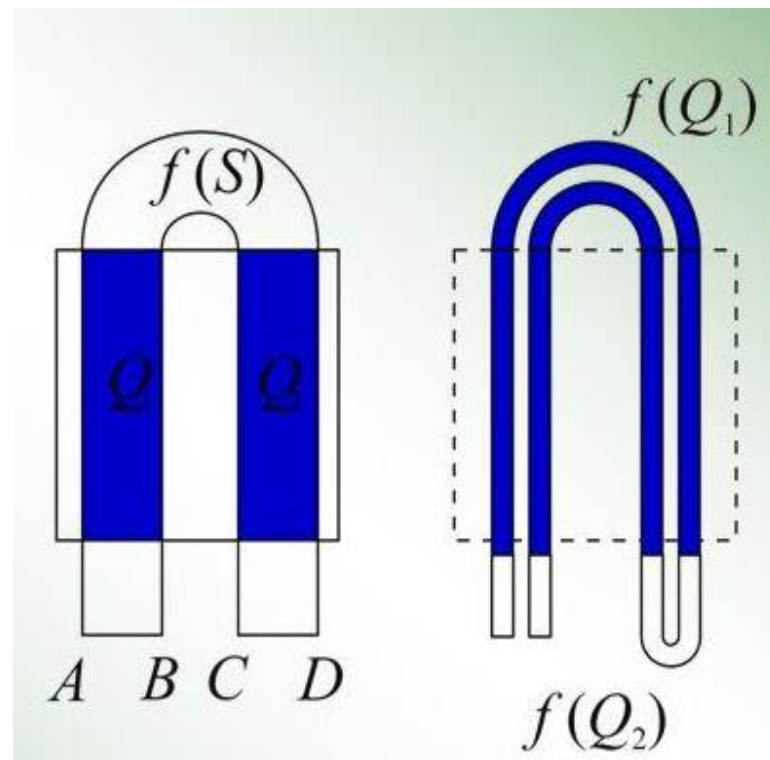
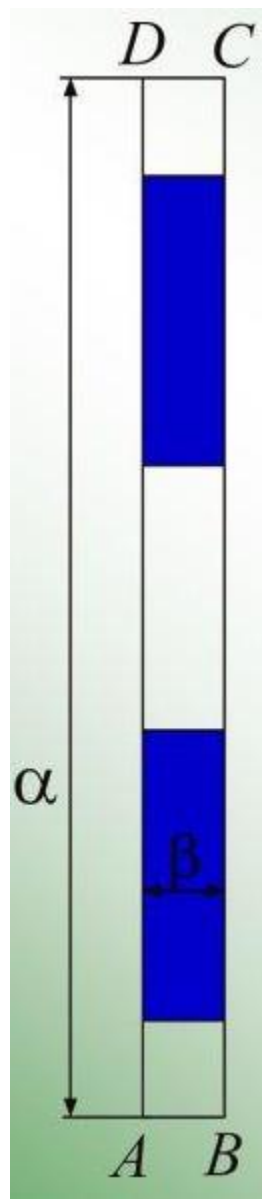
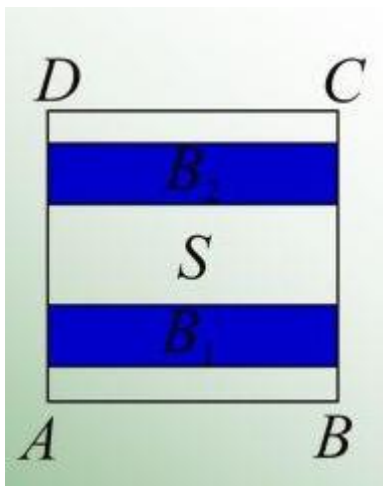
Биллиард Синая



Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий*
- *рост малого начального возмущения во времени*
- *перемешивание элементов фазового объема*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

Перемешивание



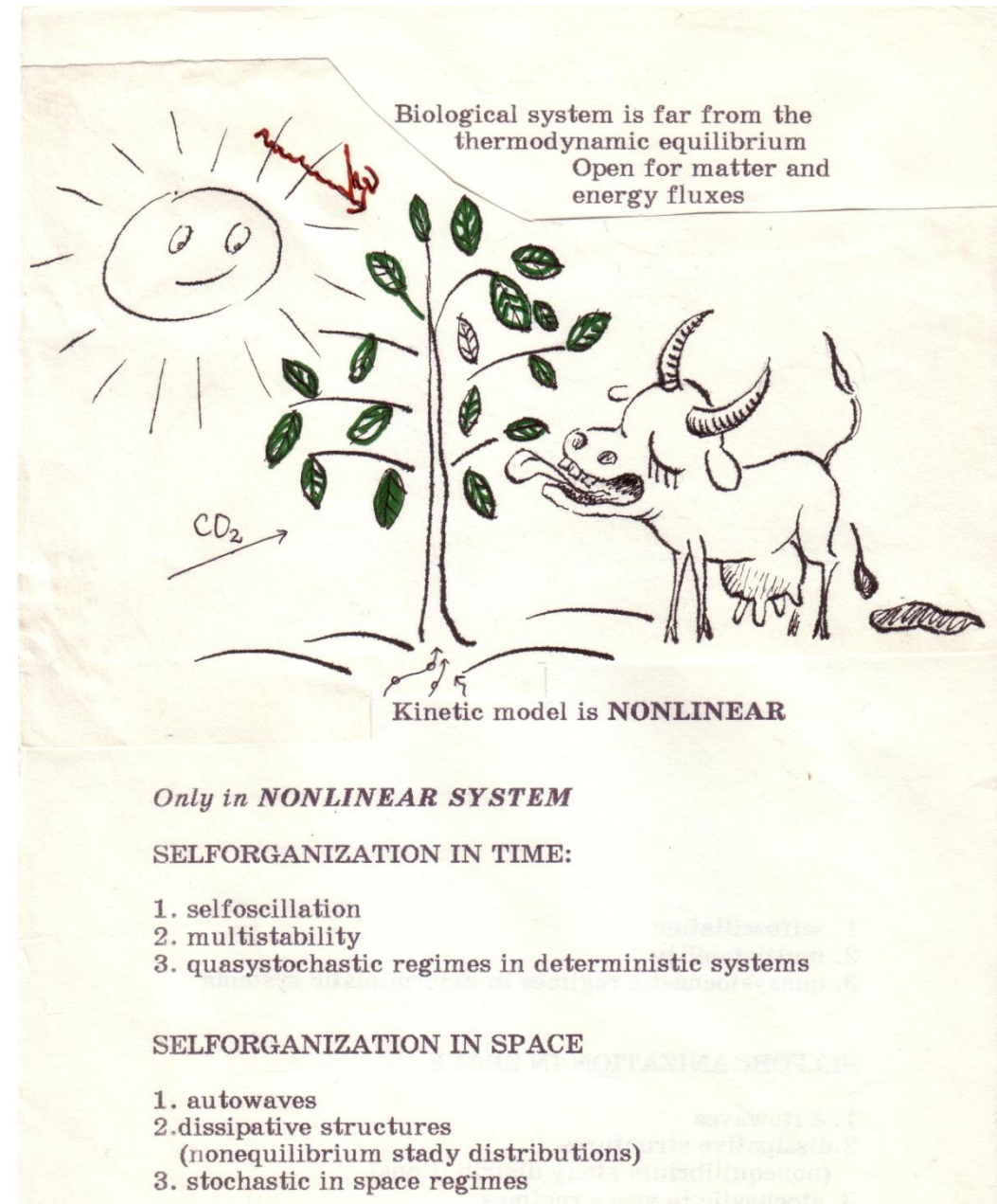
Подкова Смейла

Фазовый портрет капли молока,
закрученной ложечкой в чашке кофе

НЕЛИНЕЙНОСТЬ

является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения к хаосу не приводят.



Динамический хаос

Торнадо



Химические
реакции

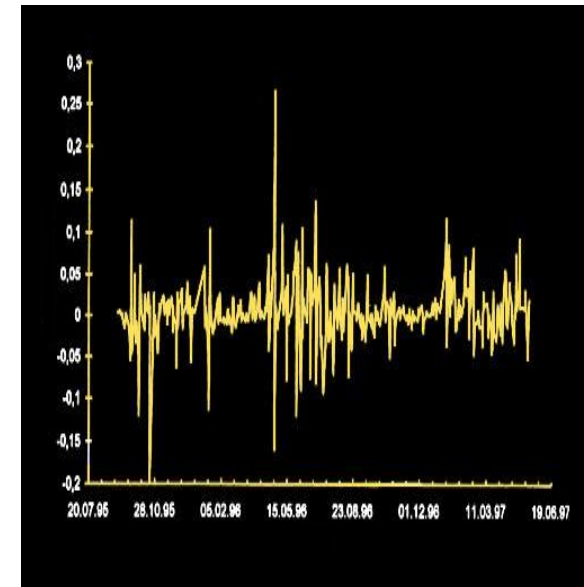


Реакция Белоусова-Жаботинского

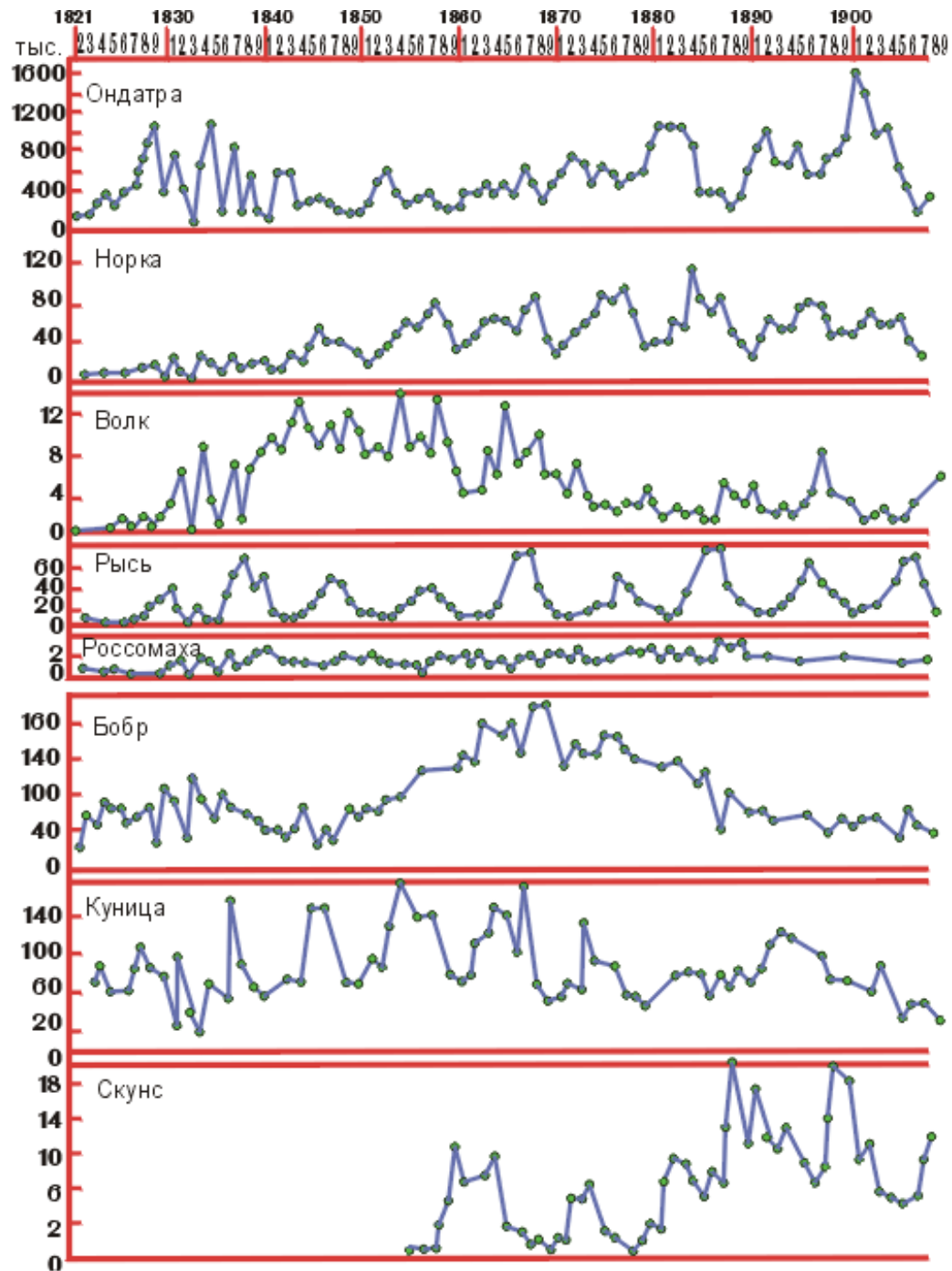
Сердечные ритмы



Александр Юрьевич Лоскутов
1960-2011

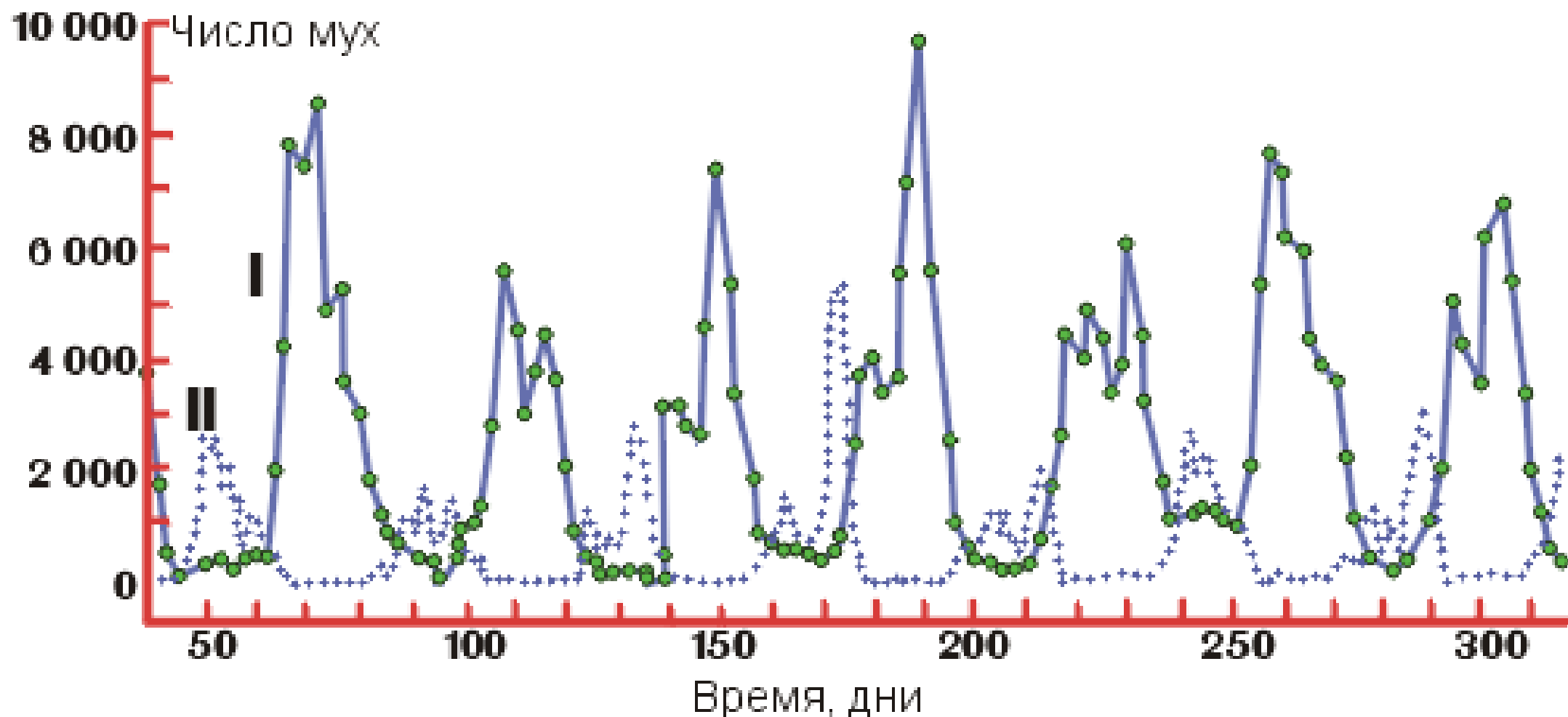


Биржевые индексы

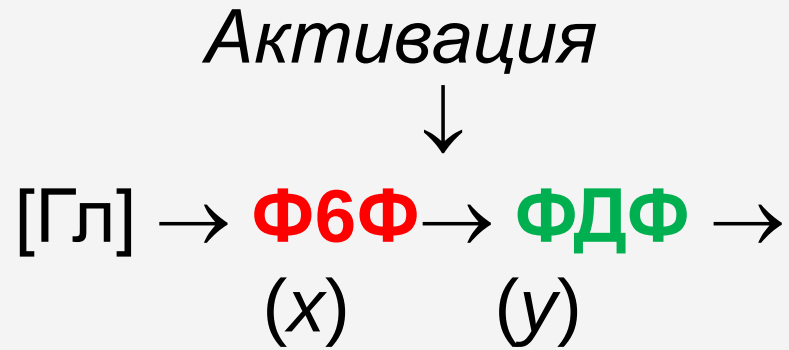


Данные по заготовкам пушнины компании Гудзонова Залива

Динамика численности плодовой мушки



Модель гликолиза



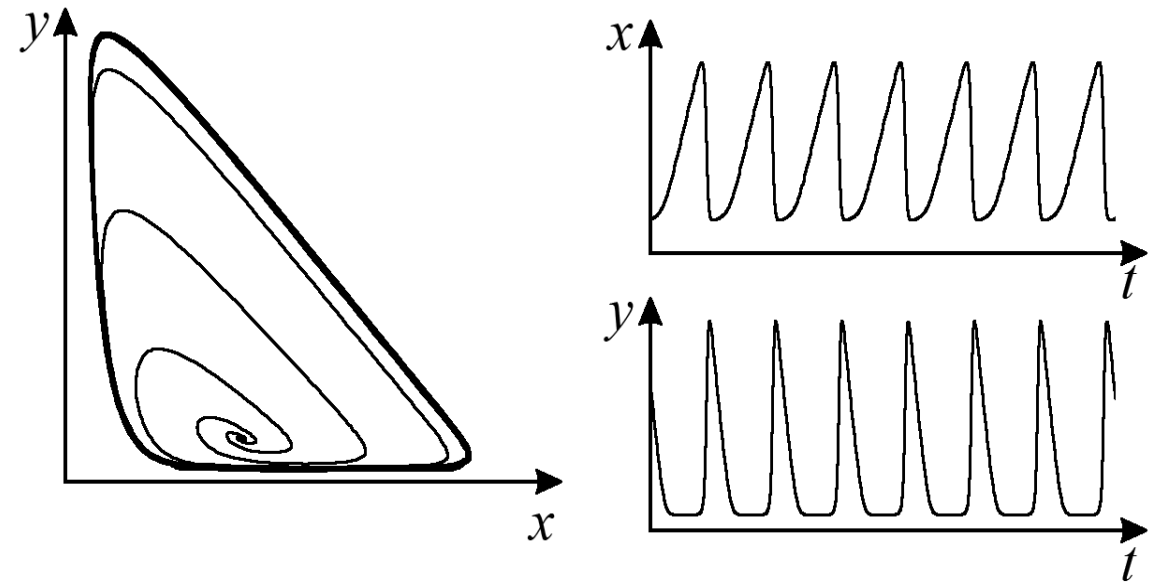
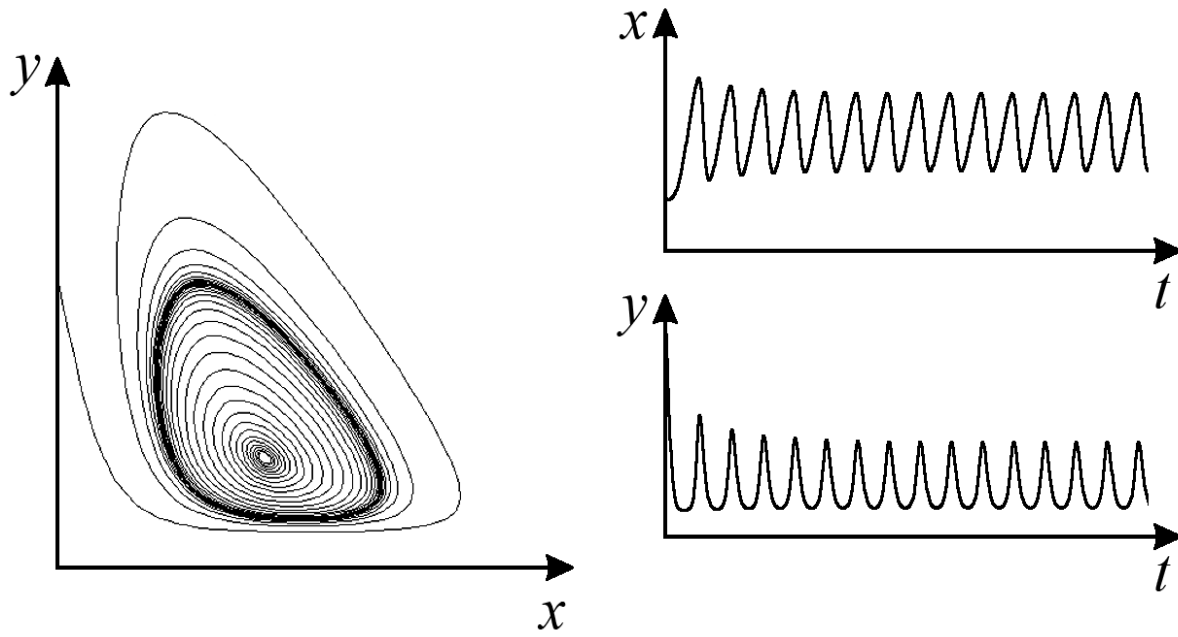
$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right)$$

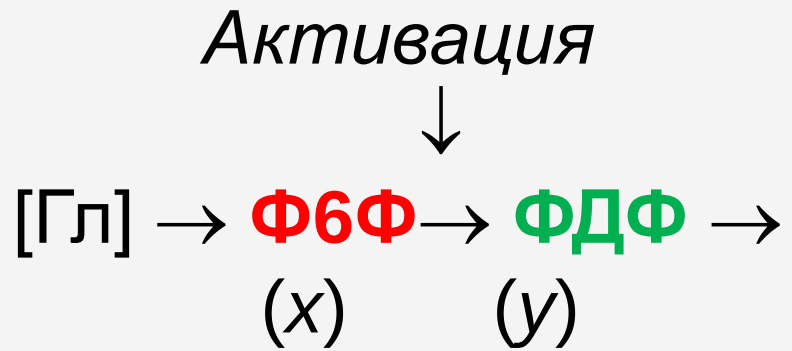
Ф6Ф

ФДФ

Автоколебания в гликолизе

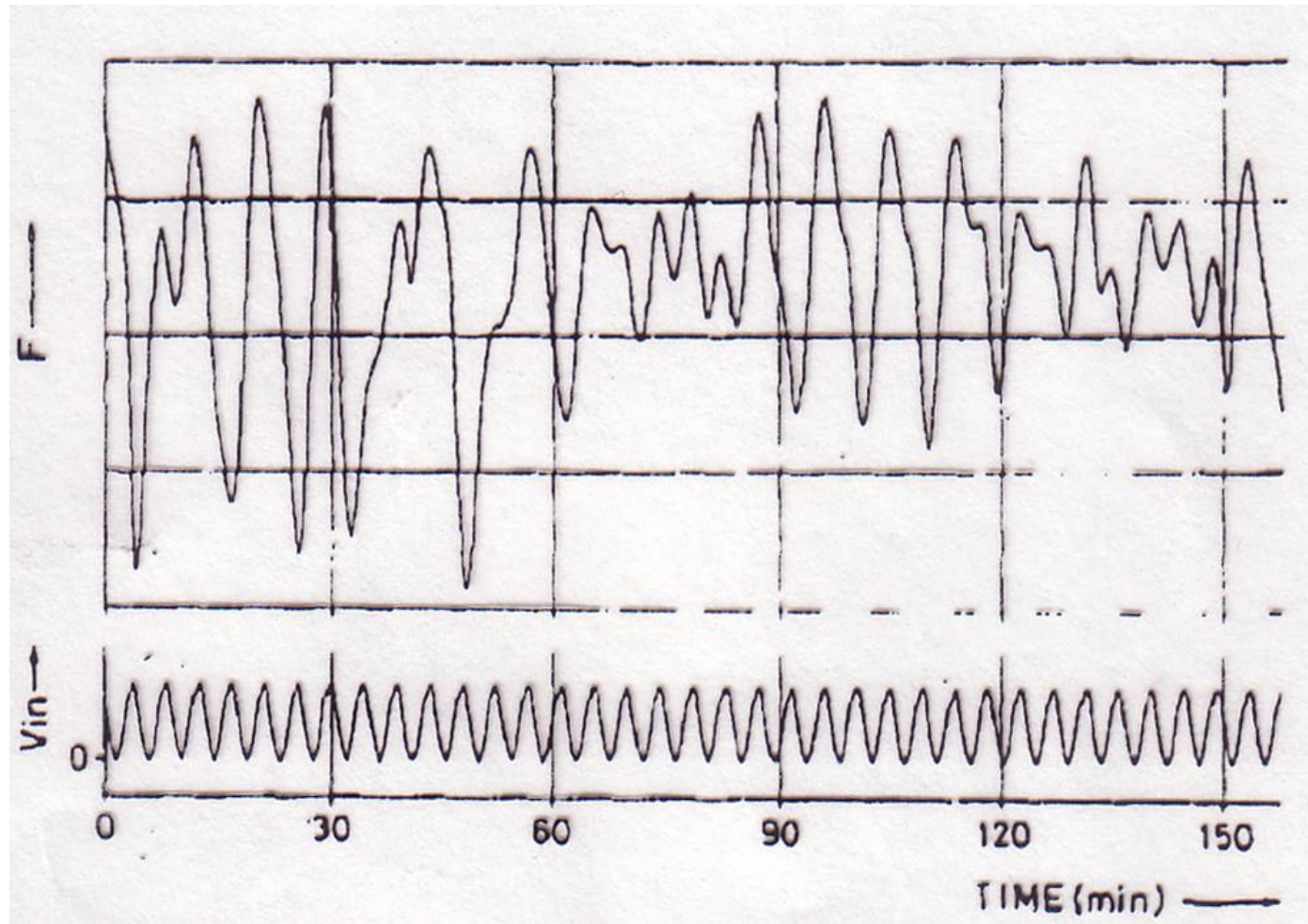


Безразмерные уравнения гликолиза

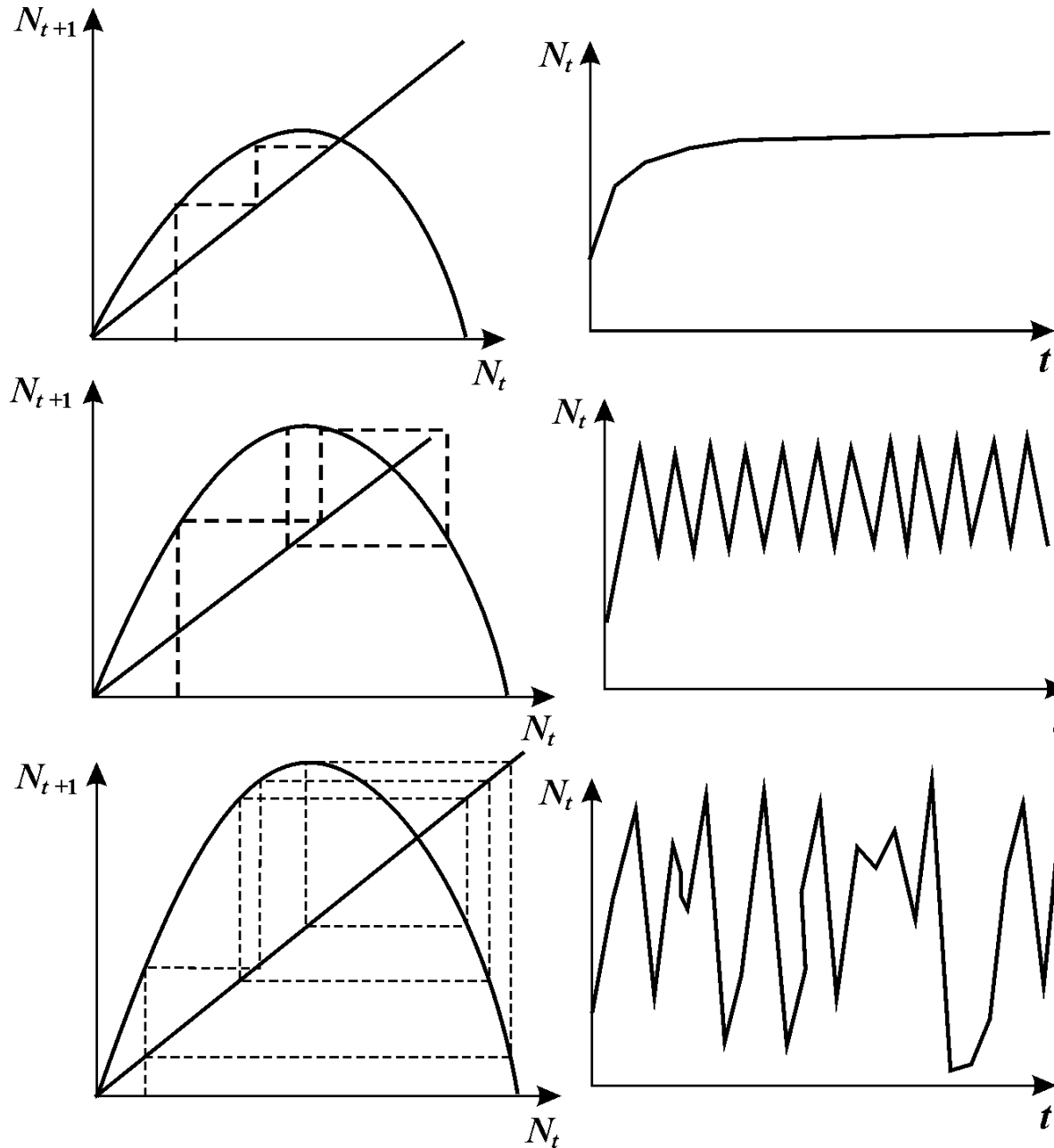


$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy + V_{in}(1 + \sin \omega t) \text{ Ф6Ф}$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right) \text{ ФДФ}$$

Хаотическая динамика в гликолизе при периодическом добавлении субстрата



Пример детерминированного хаоса

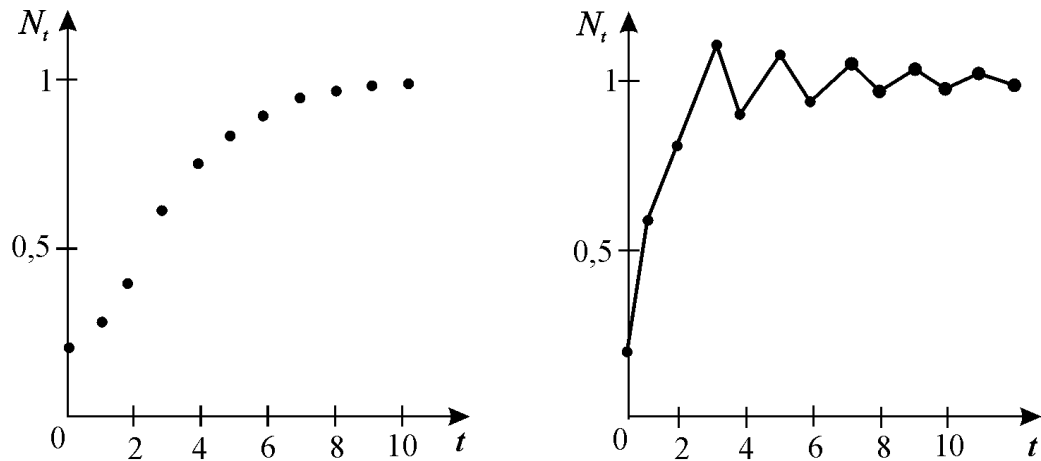


Квадратичное отображение

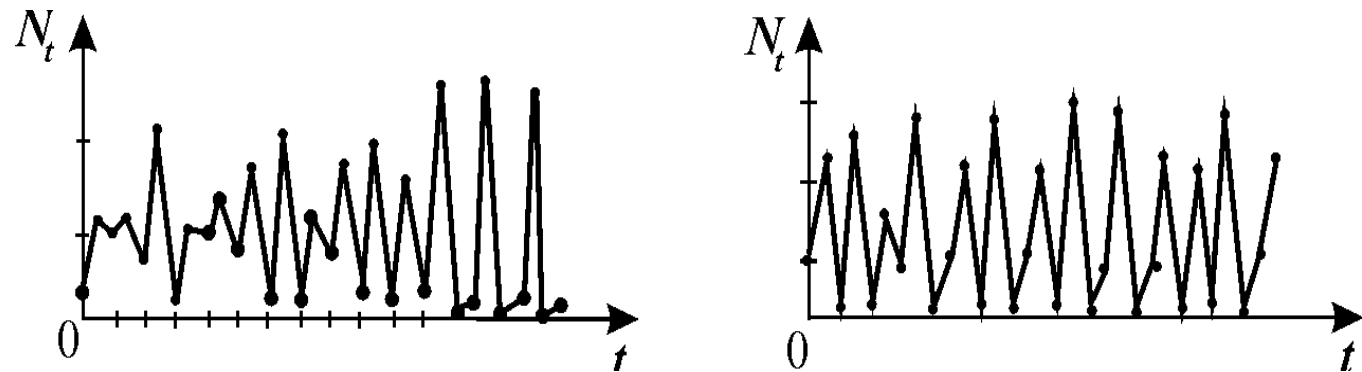
$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

Дискретный аналог логистического уравнения

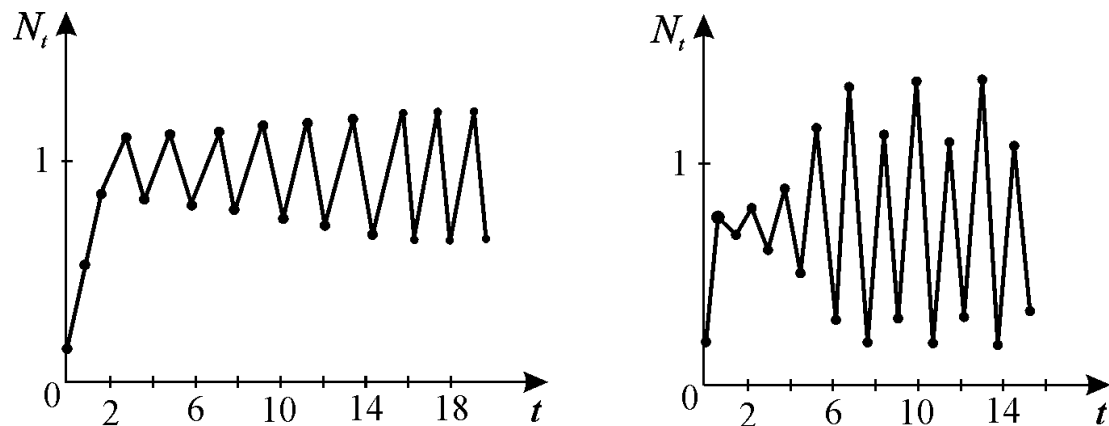
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$



Устойчивое решение



Динамический хаос

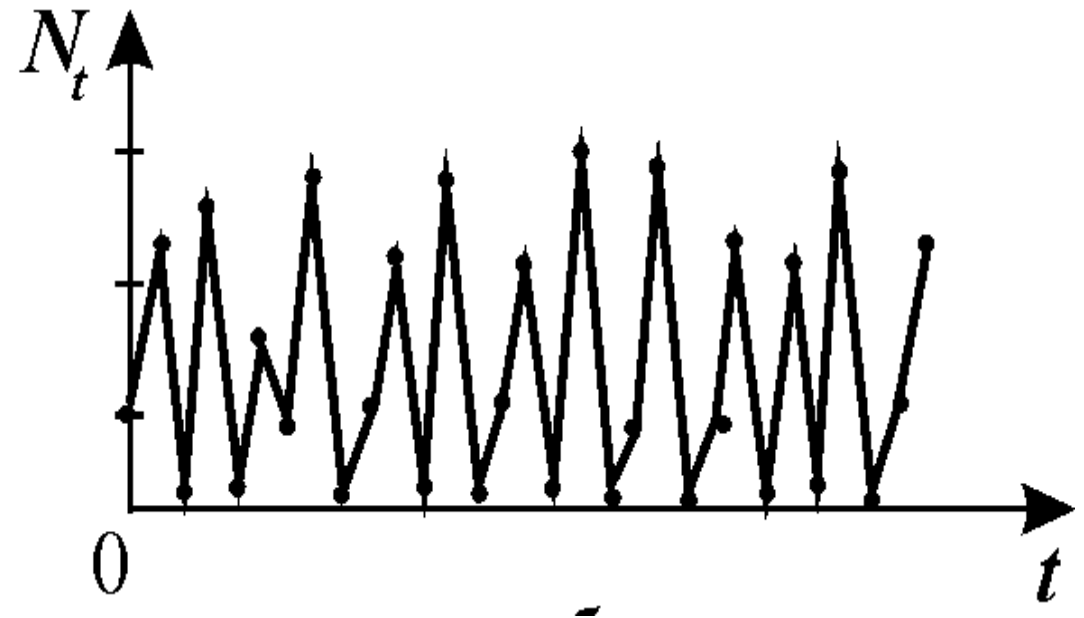
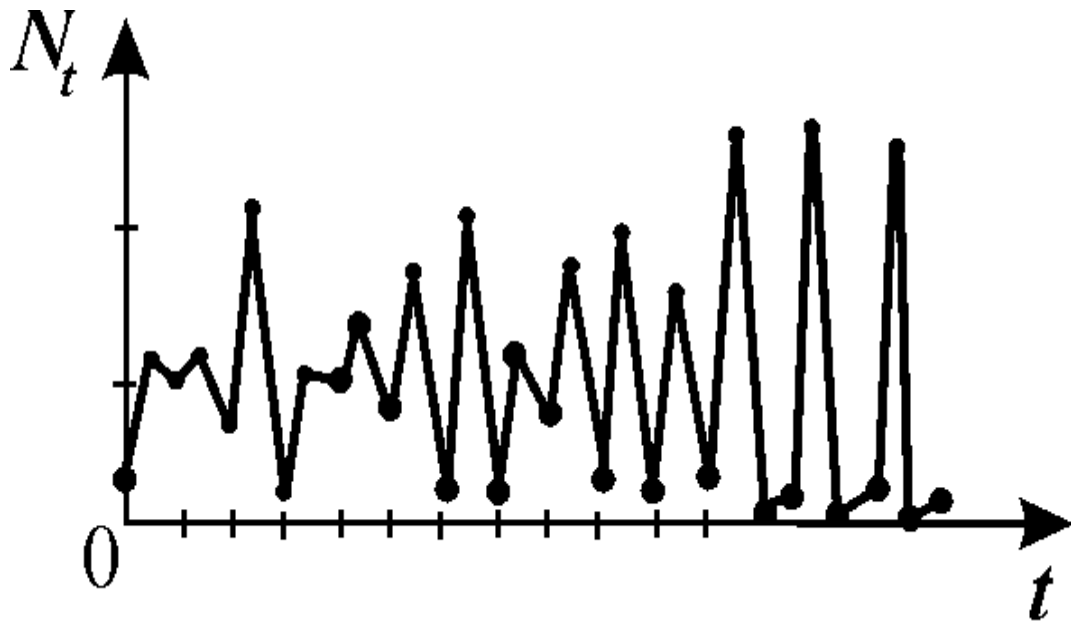


Циклы длины $2k$

$0 < r < 1$ решение монотонно
 $1 < r < 2$ затухающие колебания
 $2 < r = r_2 < 2,526$ двухточечные циклы
 $r_2 < r < r_c$ циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$
 $r > r_c = 3,102$ квазистохастические решения

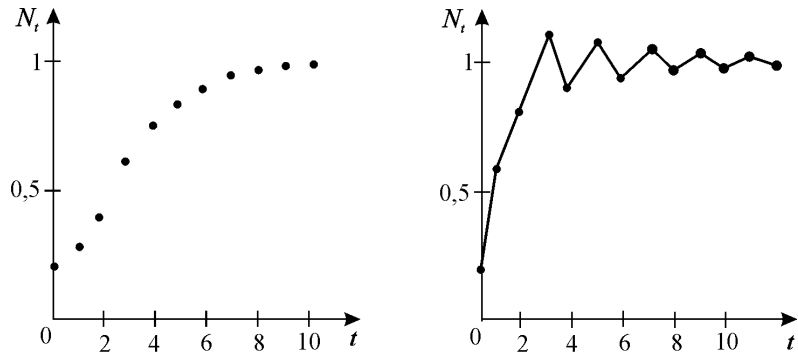
Дискретный аналог логистического уравнения

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

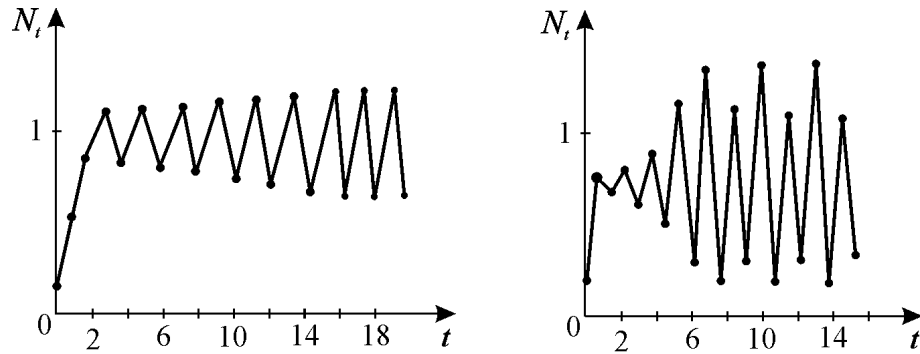


При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

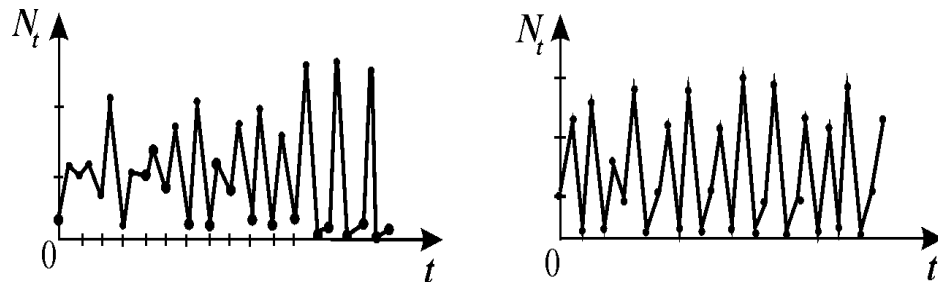
Переход к хаосу через удвоение периода



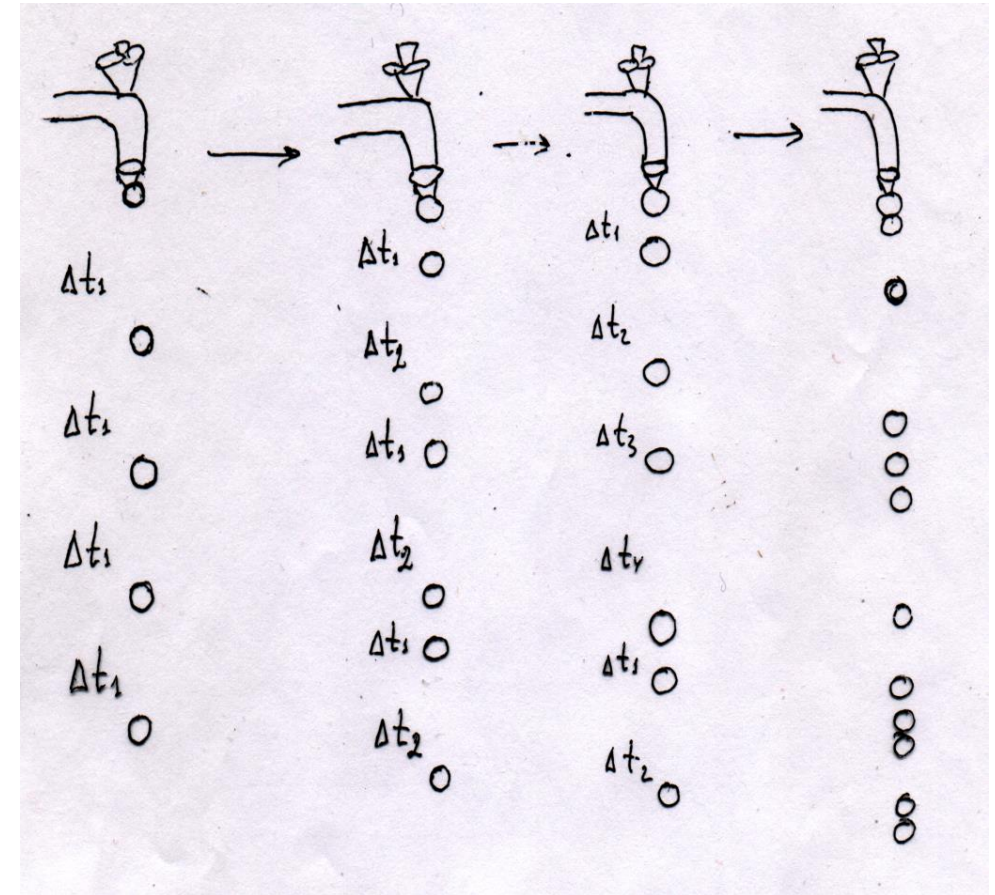
Устойчивое решение



Циклы длины $2k$



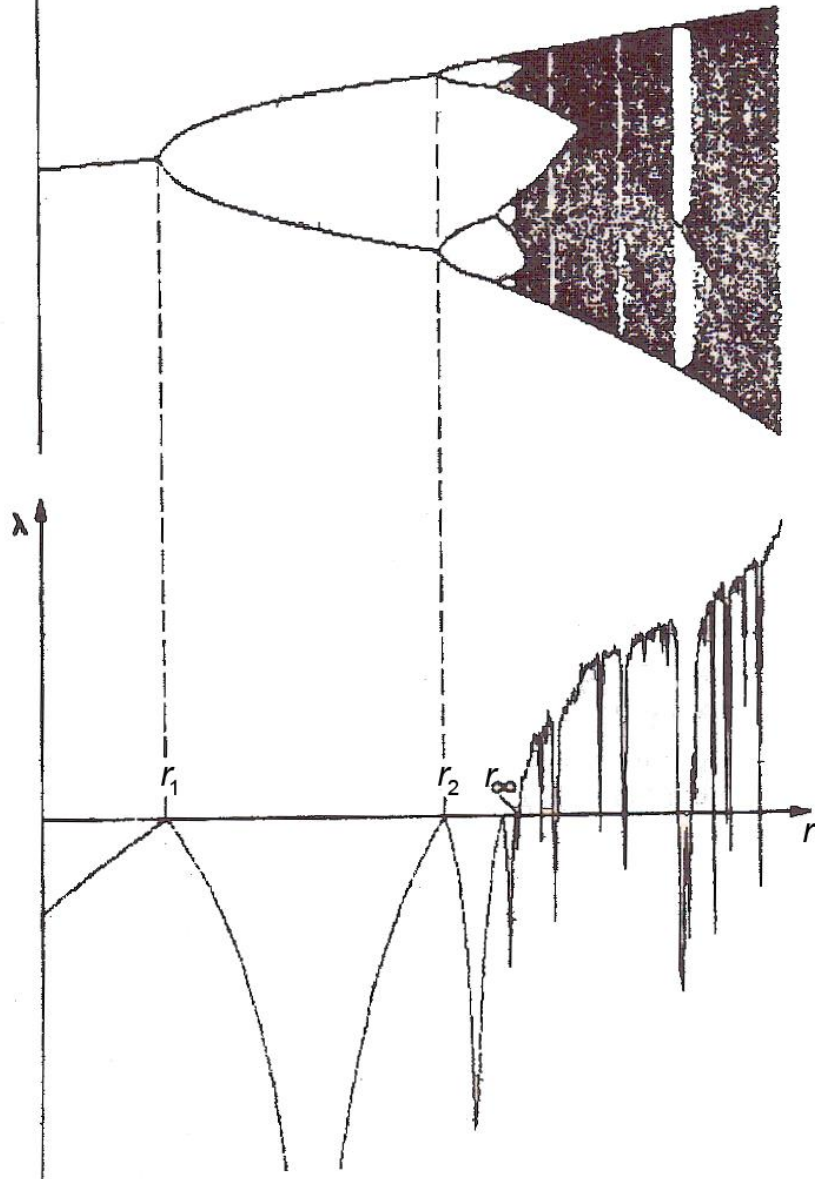
Динамический хаос



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

Сценарий удвоения периода

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$



$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|$$

Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения ρ_i матрицы линеаризации.

Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $y(t^*)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей λ_i не содержал положительных показателей.

Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием

Фракталы – самоподобные множества



*Benoît
Mandelbrot*
1924-2009

Бенуа Мальдельброт. 1924-2010.
Французский и американский математик.
Придумал понятие «фрактал» -
“Fractus” (лат) – сломанный, разбитый.



Множество Мандельброта

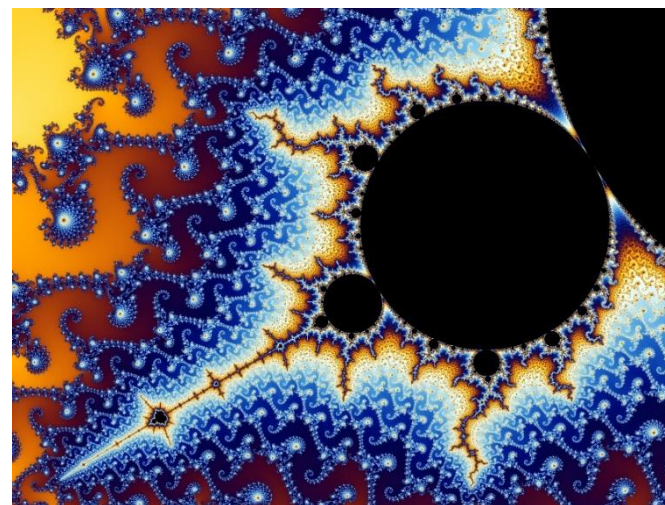
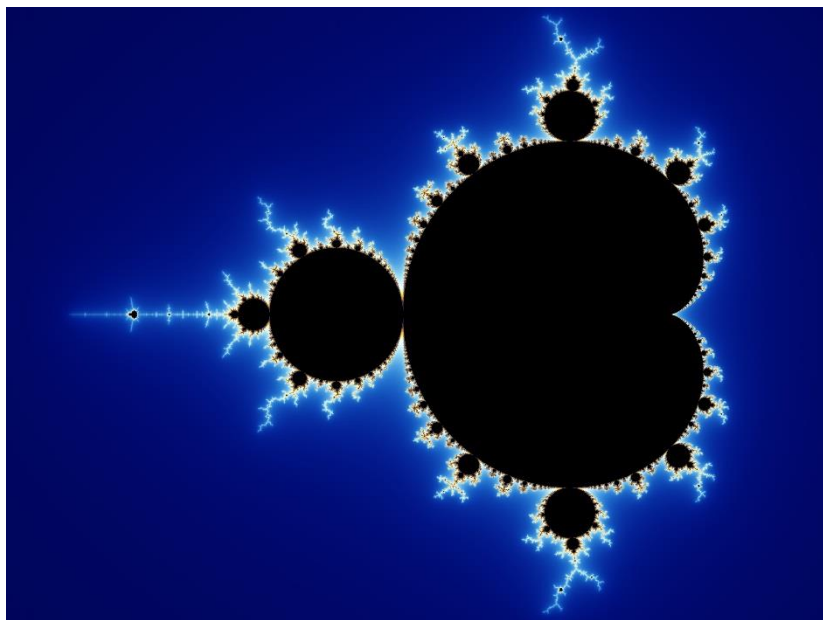
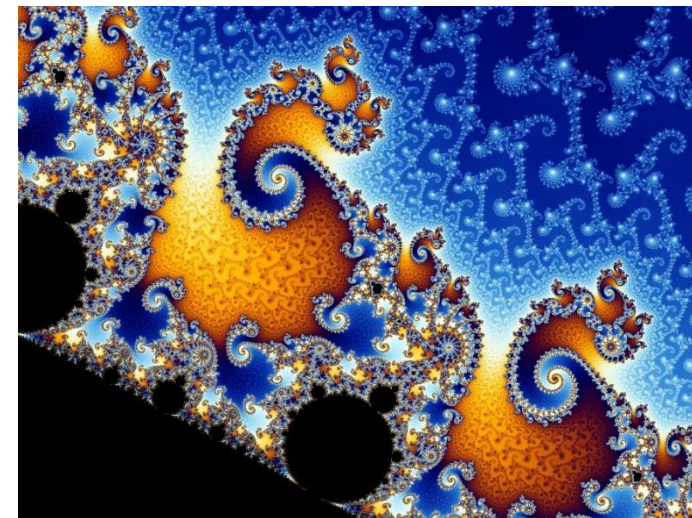
Множество точек c на комплексной плоскости, для которых последовательность z_n , определяемая итерациями

$$z_0 = 0,$$

$$z_1 = z_0^2 + c, \dots,$$

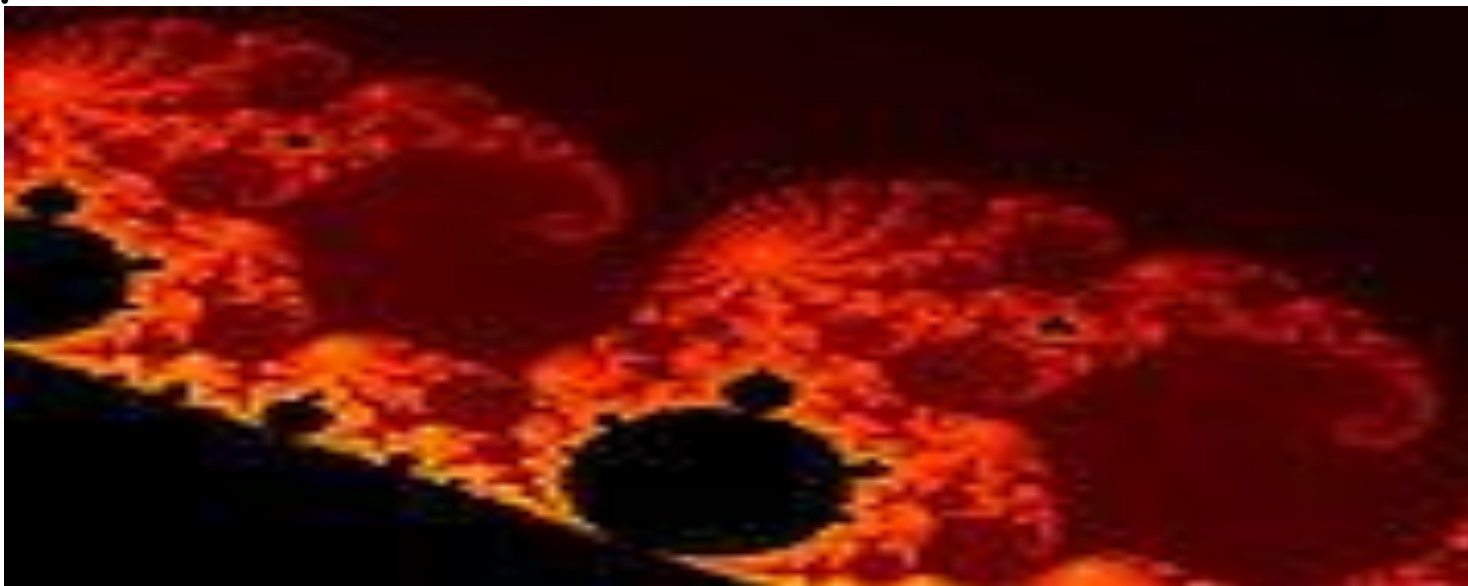
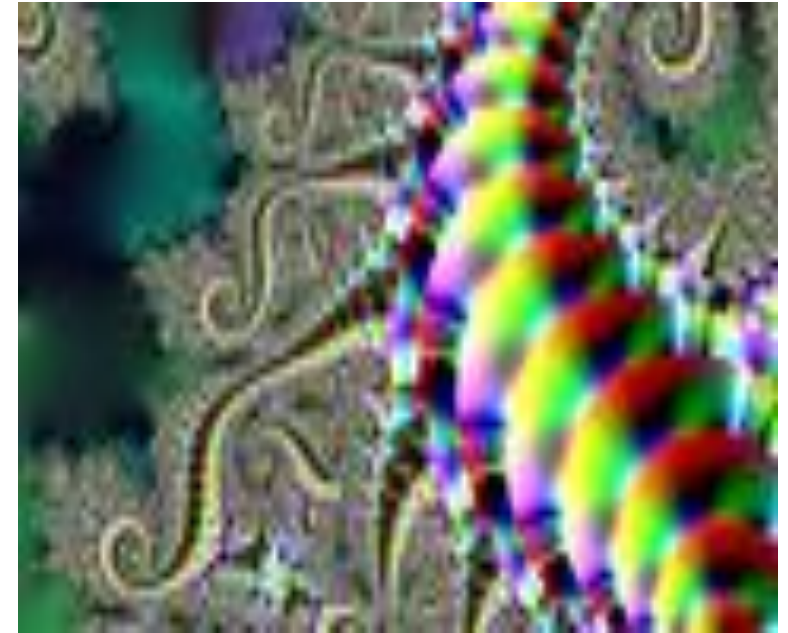
$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

конечна (то есть не уходит в бесконечность).



Определение Фрактала

- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.
- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.
- Фракталы – множества точек, вложенные в пространство
- Топологическая размерность линии – 1, поверхности – 2, шара – 3



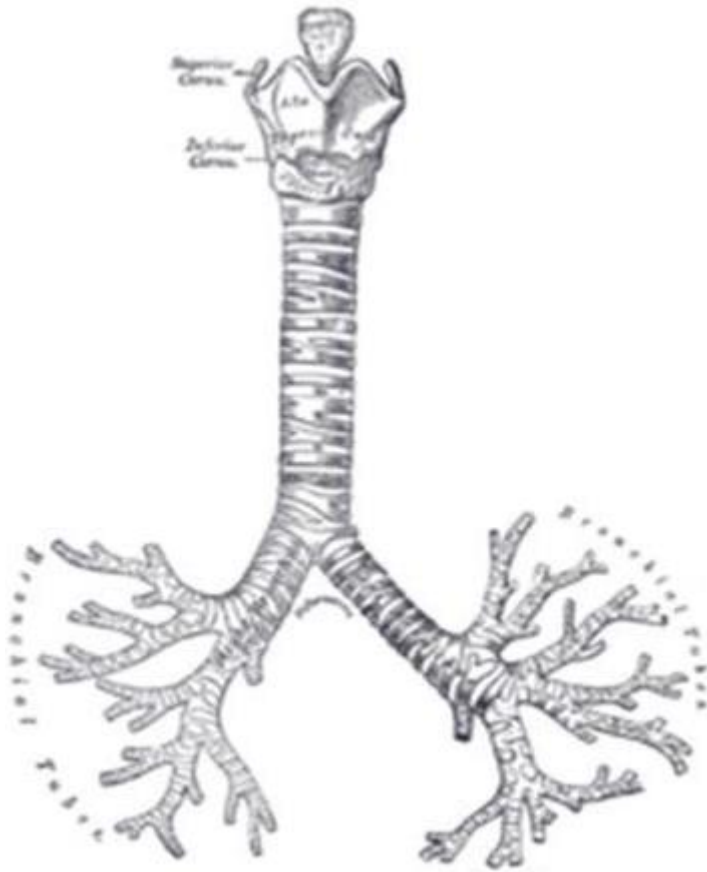
Фракталы в природе



Фракталы в природе



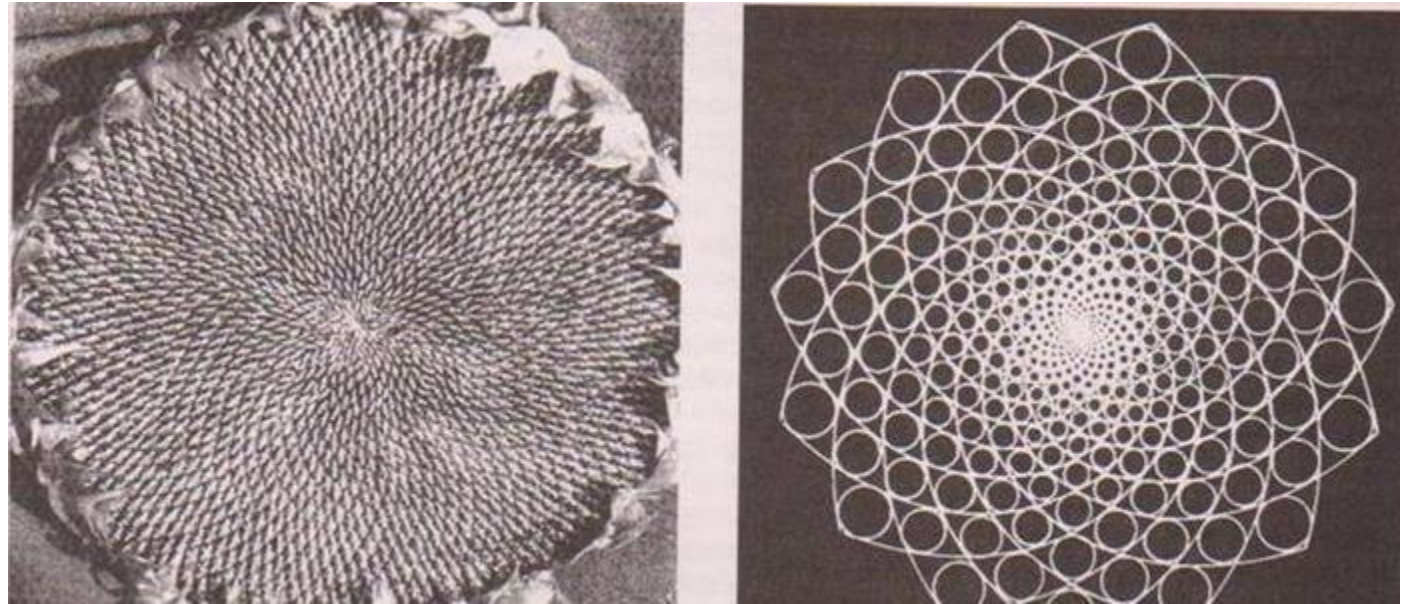
Фракталы в природе



Фракталы в природе



Раковина Наутилуса

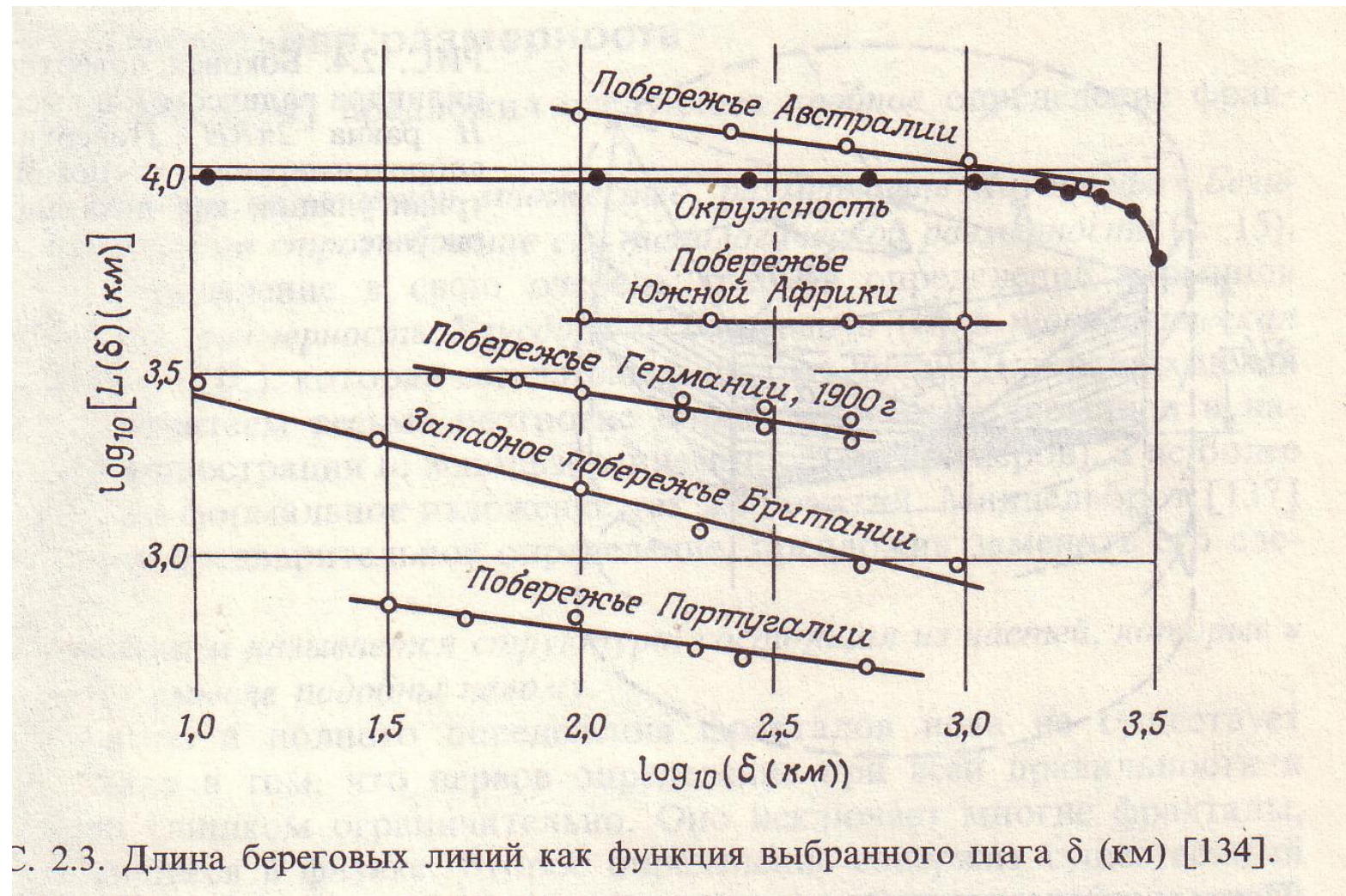
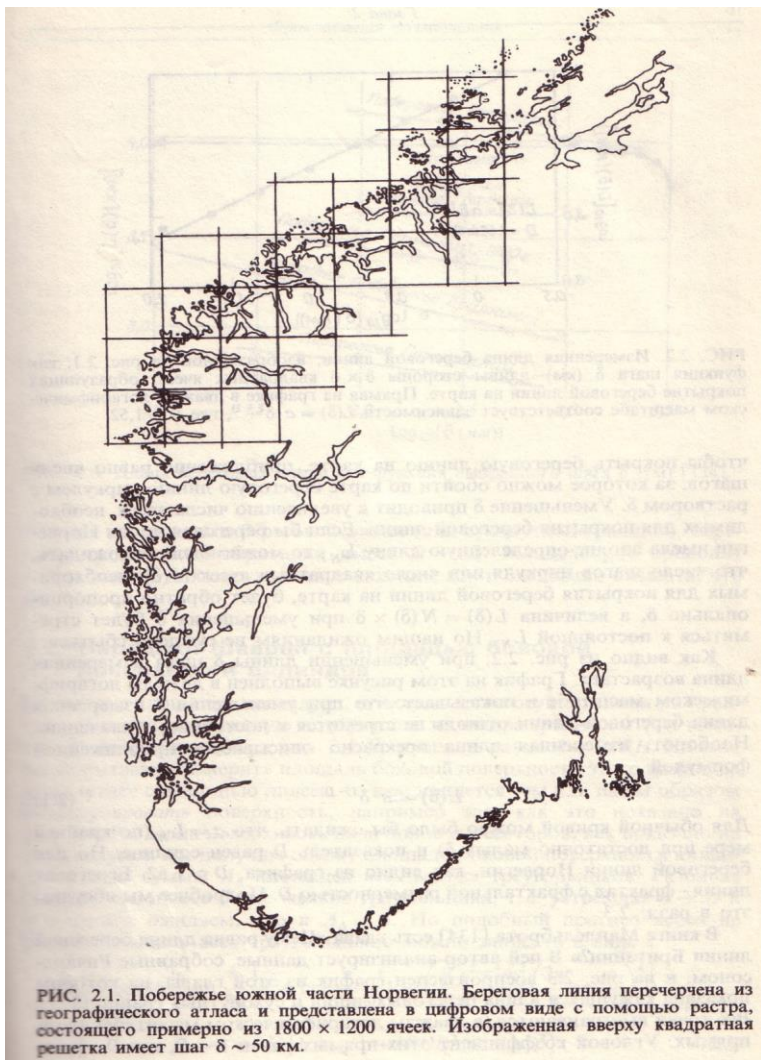


**Розетка подсолнуха
(два противоположно закрученных
семейства спиралей)**

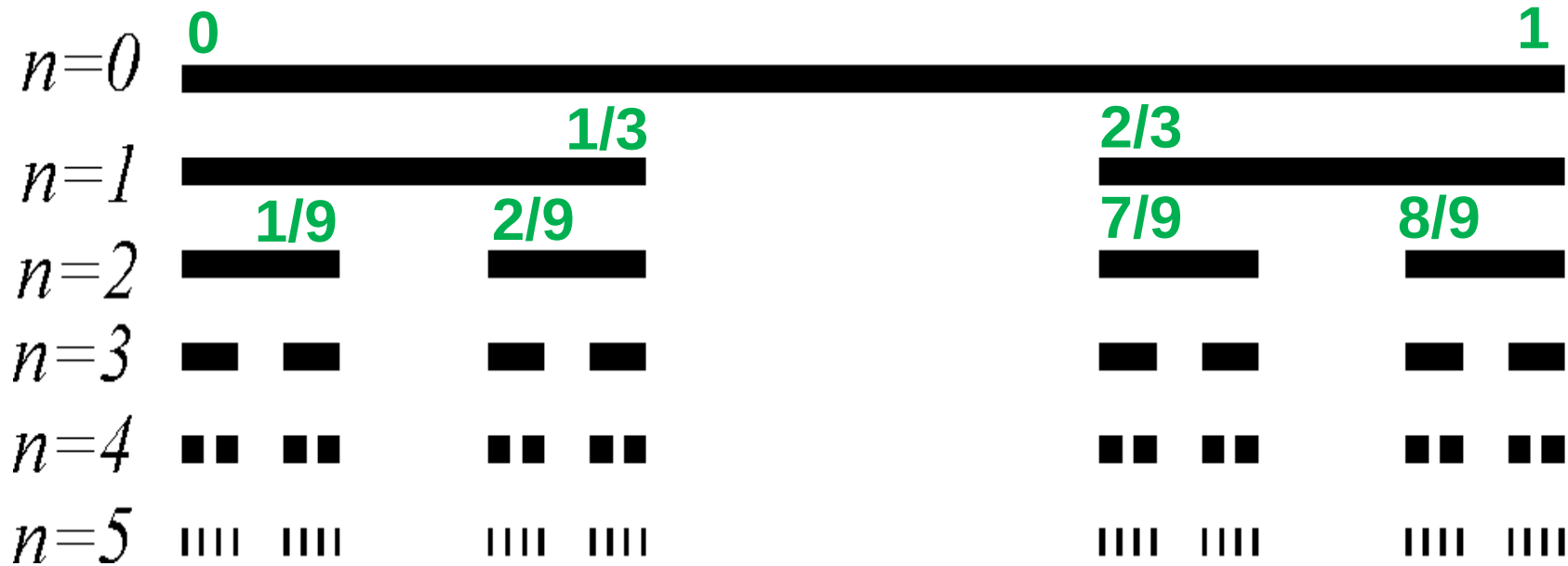
Фракталы в природе

Основное свойство фракталов — самоподобие. Любой микроскопический фрагмент фрактала в том или ином отношении воспроизводит его глобальную структуру. В простейшем случае часть фрактала представляет собой просто уменьшенный целый фрактал.

Длина береговых линий



Множество Кантора



Georg Ferdinand Ludwig
Philipp Cantor, (1845-1918)

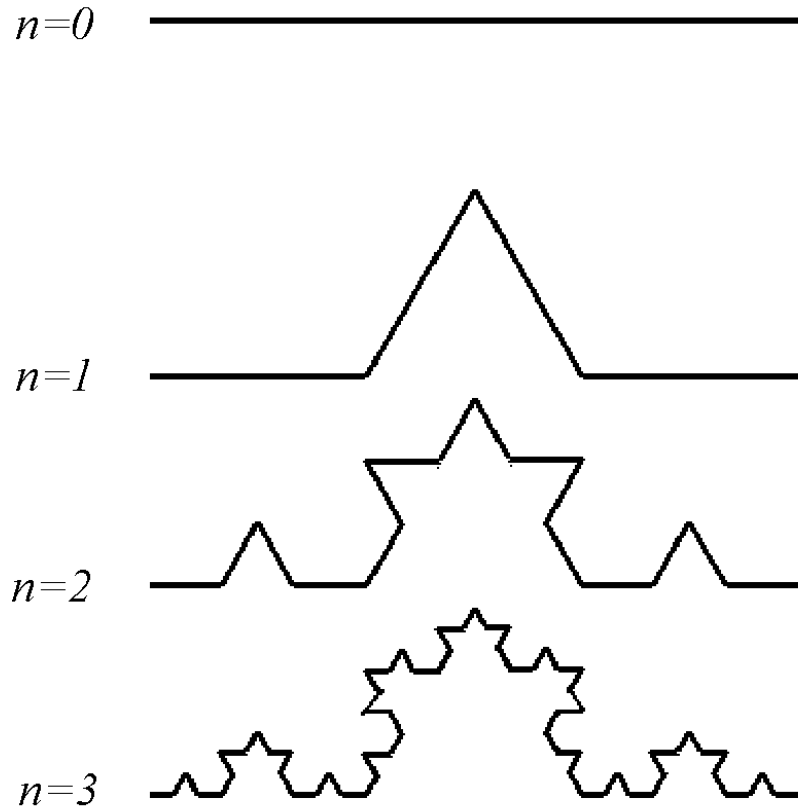
$$l_n = \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + 2^{n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1$$

Кривая Коха



фон Кох Нильс Фабьян Хельге (1870-1924),
шведский математик,
автор основополагающих
работ по теории чисел



4 звена, длина каждого – $1/3$
Длина кривой 1-го поколения $L(1/3) = 4/3$

Число звеньев: $N = 4^2 = 16$, длина каждого – $1/9$
Длина кривой 2-го поколения. $L(1/9) = 16/9 = (4/3)^2$

Длина каждого звена: $\delta = 3^{-n}$ $n = -\ln \delta / \ln 3$
 $L(\delta) = (4/3)^n = \delta^{1-D}$ $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$
Число звеньев: $N(\delta) \sim 1 / \delta^D$

Фракталы. Размерность

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

$\delta \rightarrow 0$

Для обычной кривой множитель a равен количеству отрезков: $a = L_N$, а показатель D равен единице.

Но для береговой линии Норвегии $D \sim 1,52$.

Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.



Хаусдóрф Феликс
(Hausdorff Felix, 1868-1942) –немецкий математик один из основоположников современной топологии.

Писатель.
Псевдоним Поль Монгре



Вацлав Серпинский (1882-1969)

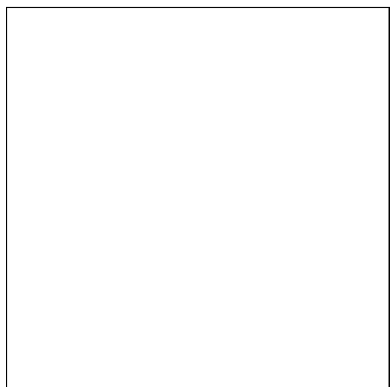
—польский математик.

Основные труды посвящены
теории множеств. Теории чисел,
топологии

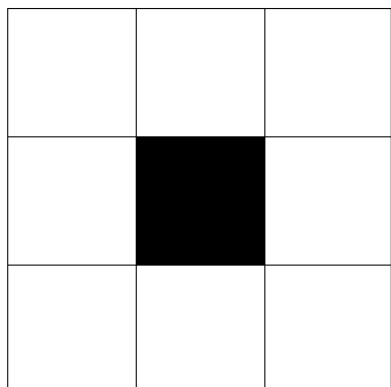
Ковер Серпинского

Начальный элемент – белый квадрат
со стороной, равной 1.

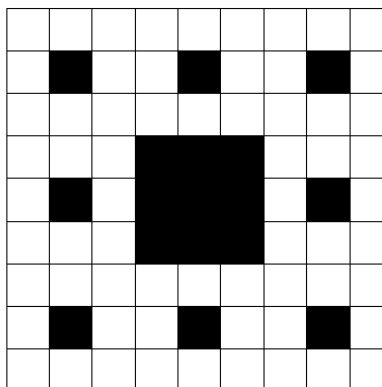
$n=0$



$n=1$



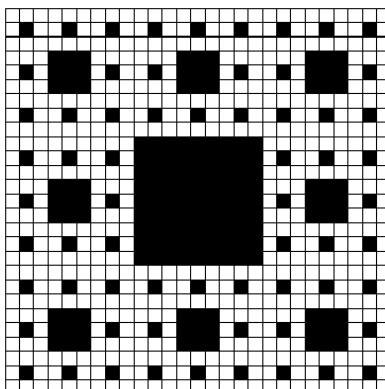
$n=2$



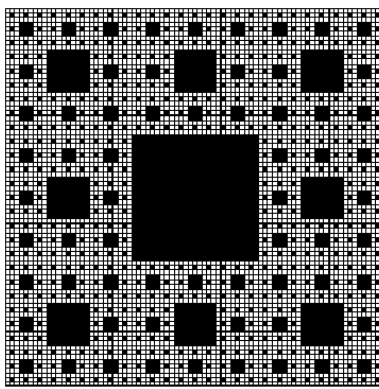
Из него вырезается черный квадрат,
со стороной, равной $1/3$.

Далее из каждого белого квадрата
вырезается снова черный квадрат, со
стороной, равной $1/3$ стороны белого
квадрата.

$n=3$



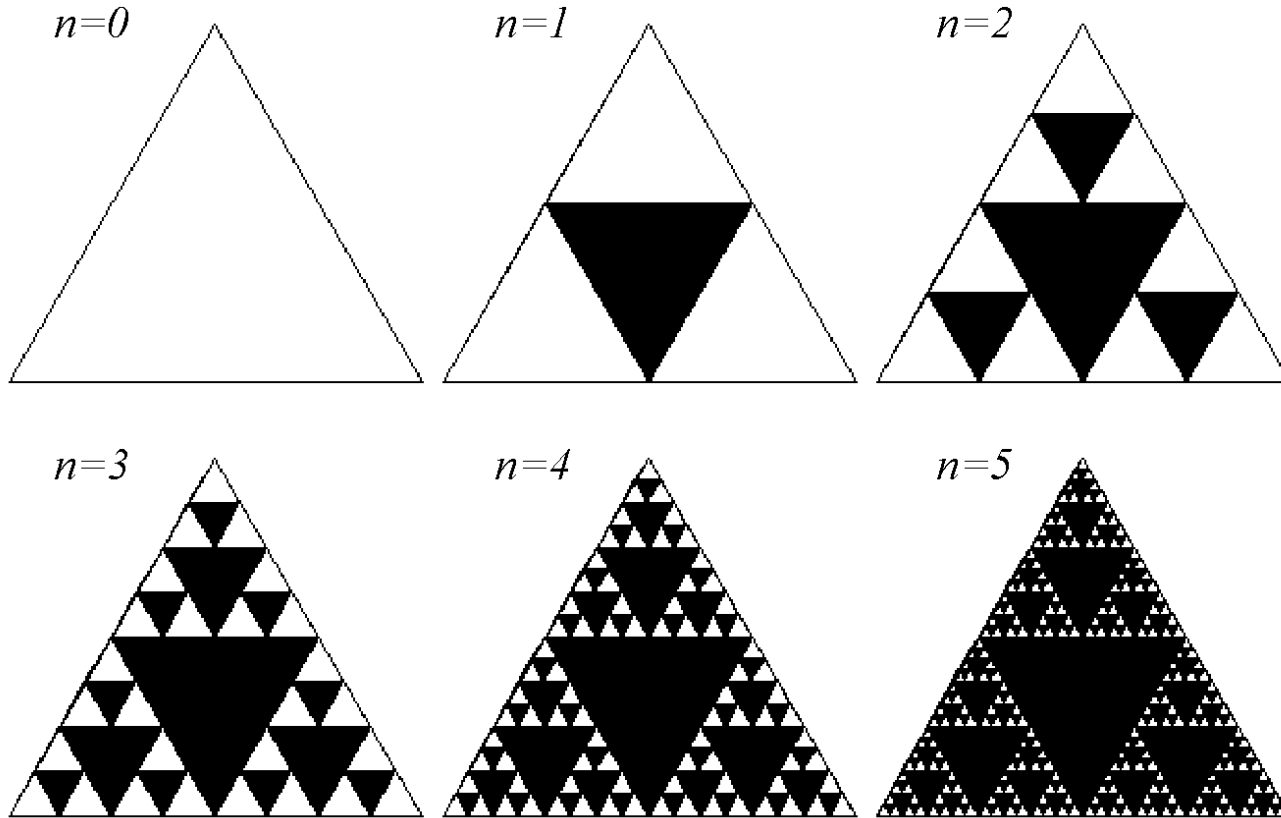
$n=4$



На рисунке показаны четыре
поколения предфракталов.

Размерность подобия
 $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$

Салфетка Серпинского



Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками.

Образующий элемент исключает из него центральный треугольник.

На рисунке показаны пять поколений предфракталов.

Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$

Альвеолы человеческого легкого

Оптическая микроскопия – 80 кв.м

Электронная микроскопия – 140 кв.м

$D = 2,17$



Мембраны

Субклеточные мембраны в клетках печени

Внешние митохондриальные мембраны $D = 2,09$

Внутренние митохондриальные мембраны $D = 2,53$



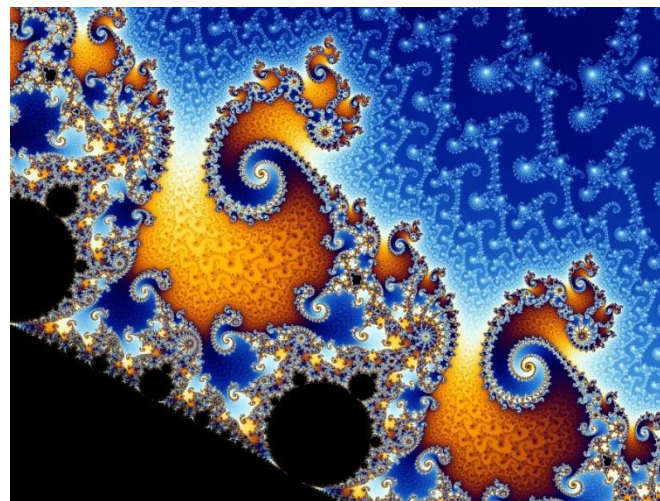
Х.-О. Пайтген, П.Х.Рихтер
Красота фракталов

Образы
комплексных динамических
систем

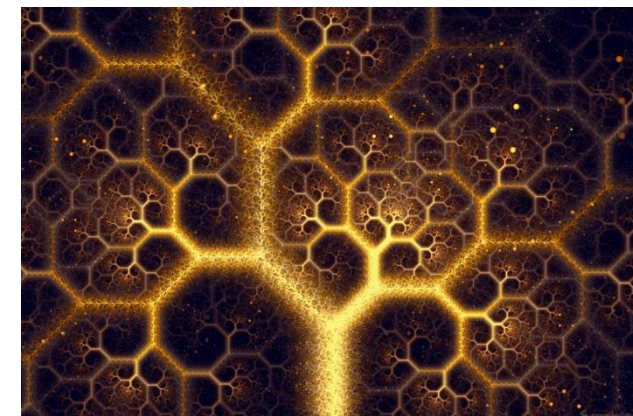


Издательство «Мир»

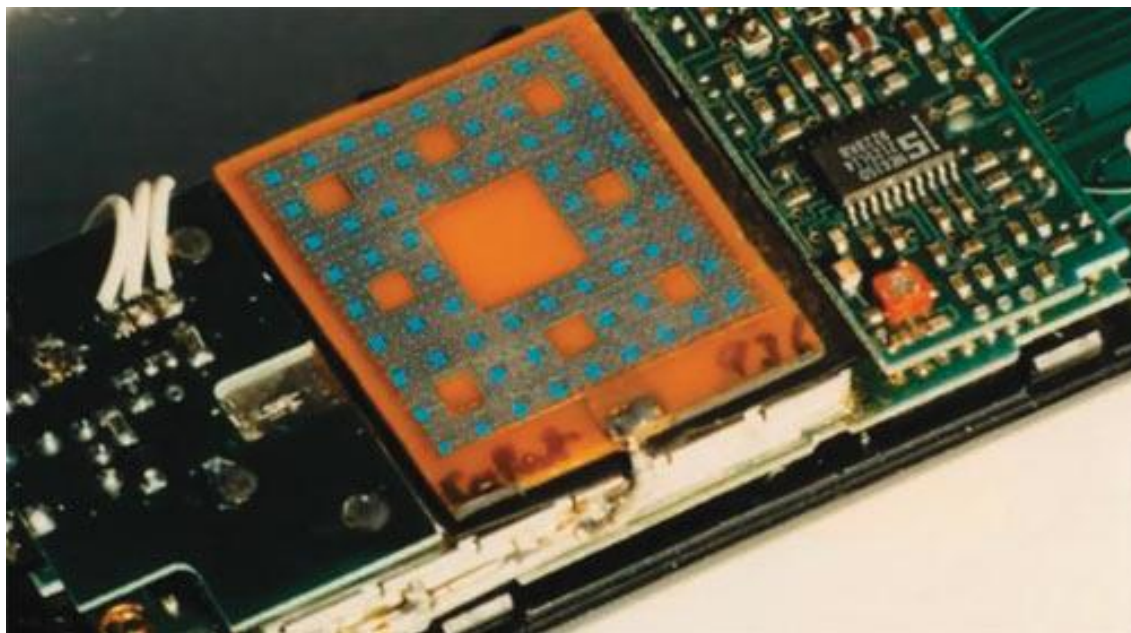
Хайнс-Отто Пайтген
(Heinz-Otto Peitgen) –
Один из самых известных
исследователей в изучении фракталов.



В 1986 году Пайтген и Питер Рихтер опубликовали свою богато иллюстрированную и очень влиятельную книгу «Красота фракталов», которая была одной из первых книг, популяризирующих концепцию фракталов для широкой публики.



Применение фракталов в телекоммуникациях

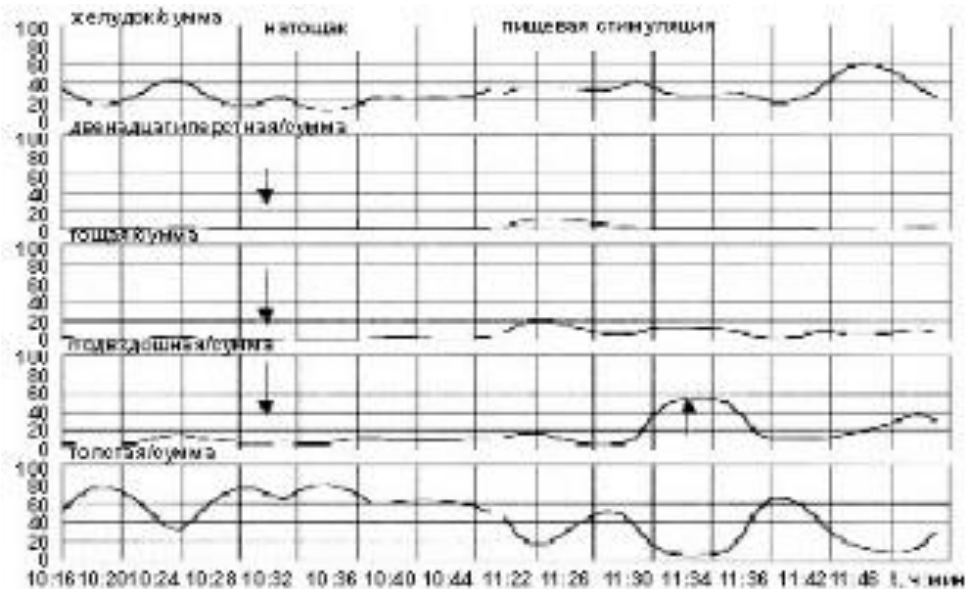


Фрактальные антенны — относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающийся своей геометрией от известных решений

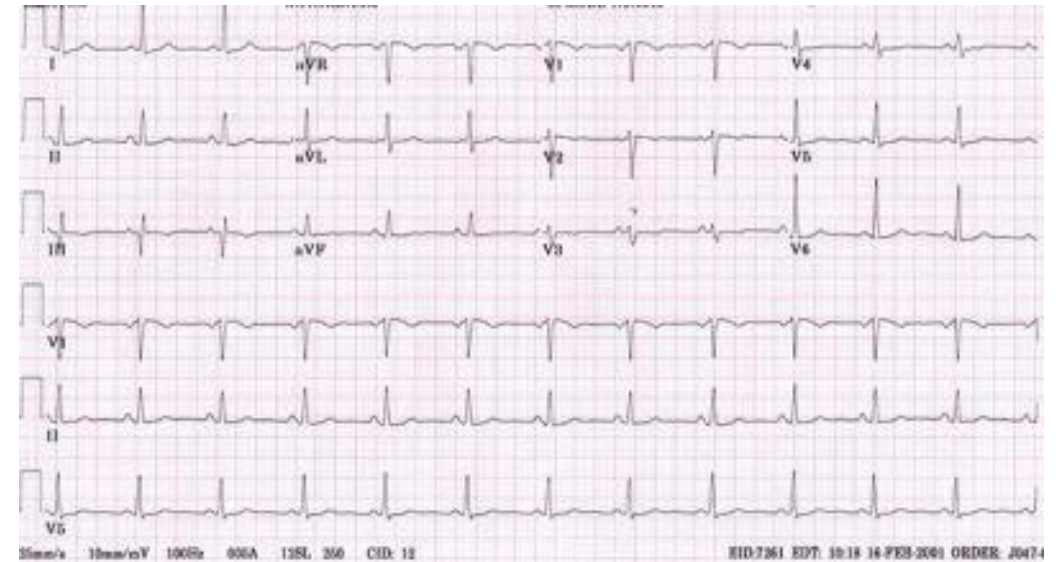
Ведутся исследования возможности фрактального сжатия трафика передаваемого по сетям, с целью более эффективной передачи информации

Применение фракталов в медицине

Применение фрактального анализа к получаемым биоэлектрическим сигналам от органов, позволяет эффективно судить о моторной функции органов и ЖКТ и успешно диагностировать различные заболевания.

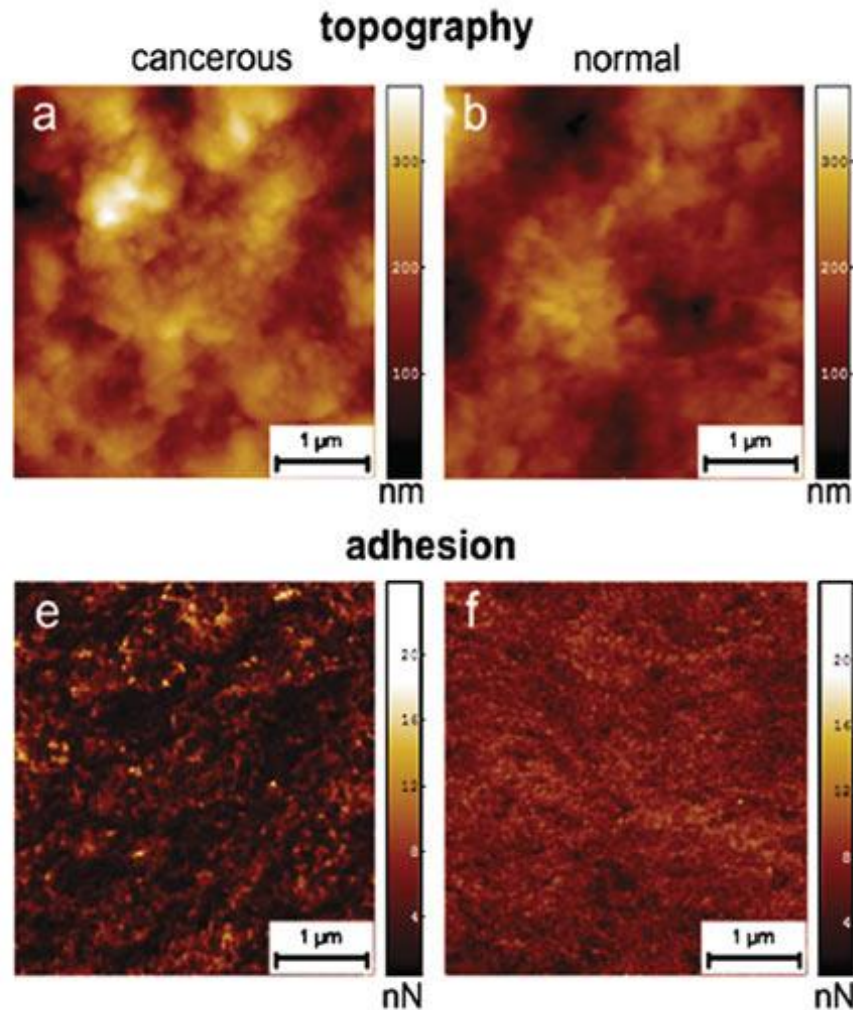


Пример электрогастроэнтерограммы.



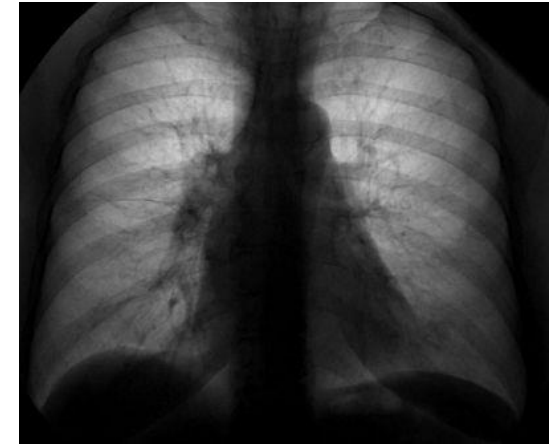
Пример кардиограммы.

Применение фракталов в медицине



Карты адгезии поверхностей
раковых и нормальных клеток

Рентгеновские снимки
обработанные с
помощью фрактальных
алгоритмов дают более
качественную картинку



Фрактальная размерность
сети сосудов опухоли и
здоровой ткани отличается

Вопросы

- В чем смысл существования таких систем?
- Приведите примеры детерминированных систем с квазистохастическим поведением в своей области знания

Галактики

