Г.Ю.Ризниченко

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение.
Правая часть не зависит явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx\sin wt$$

x, t – переменные

a,b,d,w - параметры

Стационарное состояние

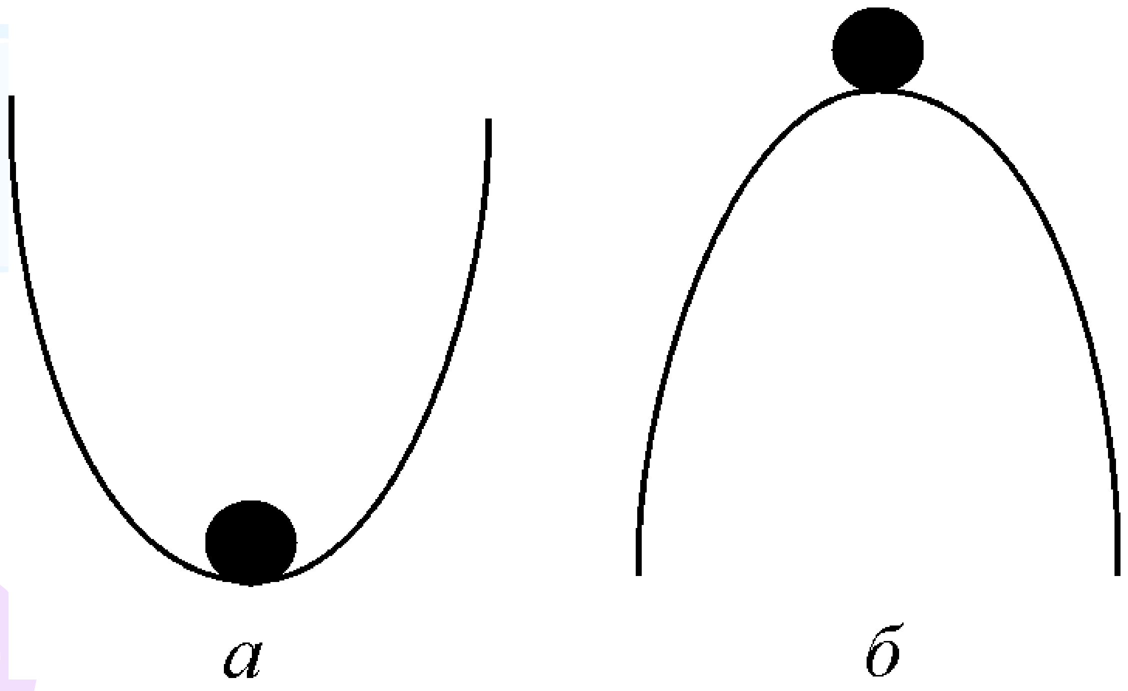
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения переменной х равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть уравнения равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное состояние устойчиво, если малые отклонения с течением времени остаются малыми

Определение устойчивости по Ляпунову

Состояние равновесия (стационарное состояние) *устойчиво по Ляпунову*, если,

задав сколь угодно малое положительное ε, всегда можно найти такое δ , что

если в начальный момент отклонение от стационарного состояния $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$,

то для любого последующего момента времени $t_0 \le t < +\infty$

отклонение от стационарного состояния $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$

Метод Ляпунова исследования устойчивости стационарного состояния

Метод линеаризации функции в окрестности стационарного состояния

Выразим переменную *x* через отклонение от стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi \qquad \xi / \bar{x} << 1$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в ряд

Тейлора в точке $\bar{x}$

$$\frac{\mathbf{d}\xi}{\mathbf{dt}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{f}'(\bar{\mathbf{x}})\xi + \frac{1}{2}\mathbf{f}''(\bar{\mathbf{x}})\xi^2 + \ldots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда

Отбросим члены более высокого порядка. Получим линеаризованное уравнение:

$$d\xi / dt = a_1\xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

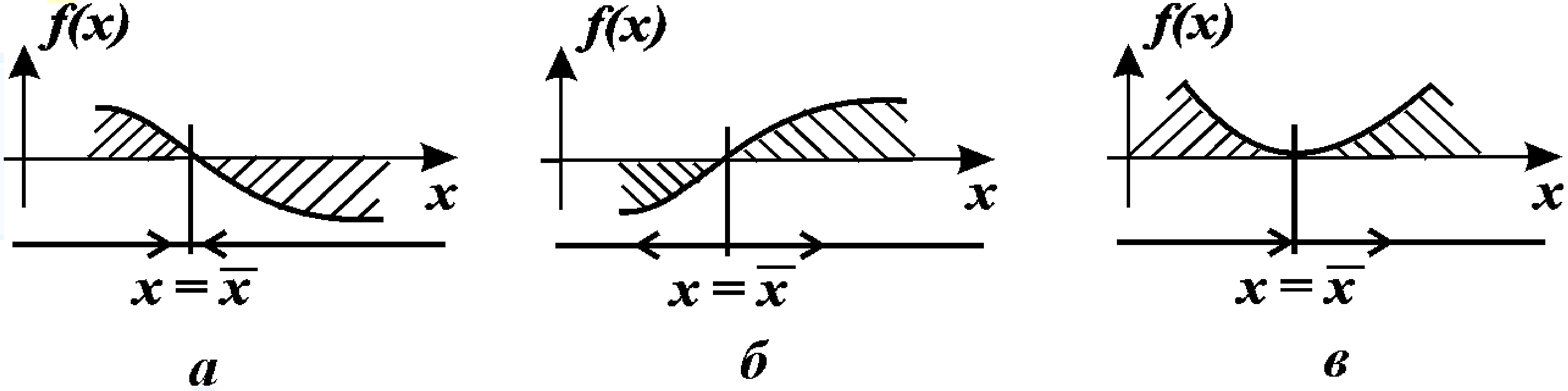
C – произвольная постоянная. C=ξ(0)

Метод Ляпунова

Устойчивость стационарного состояния уравнения $dx/dt=f(x)$ *определяется знаком производной правой части в стационарной точке.*

Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении $f(x)$ *членов более высокого порядка*

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



устойчиво неустойчиво неустойчиво

Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*