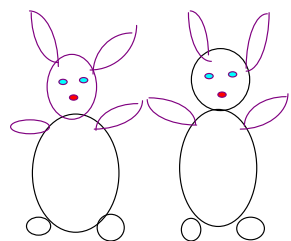


Модели популяционной динамики

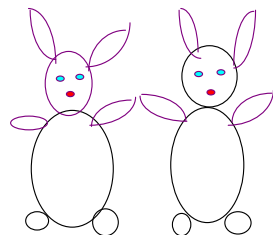
Модели одной популяции

- *Непрерывные модели: экспоненциальный рост, логистический рост, модели с наименьшей критической численностью.*
- *Модели с неперекрывающимися поколениями. Дискретное логистическое уравнение.*
- *Диаграмма и лестница Ламерея.*
- *Типы решений при разных значениях параметра: монотонные и затухающие решения, циклы, квазистохастическое поведение, вспышки численности.*
- *Матричные модели популяций.*
- *Влияние запаздывания.*

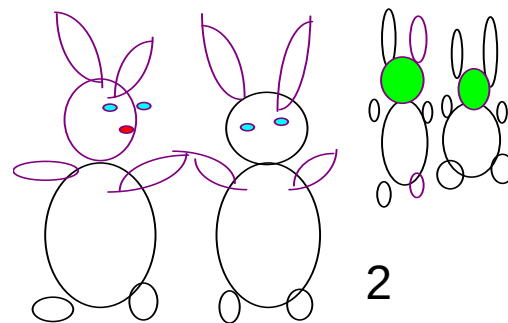
Популяционная динамика ряд Фибоначчи



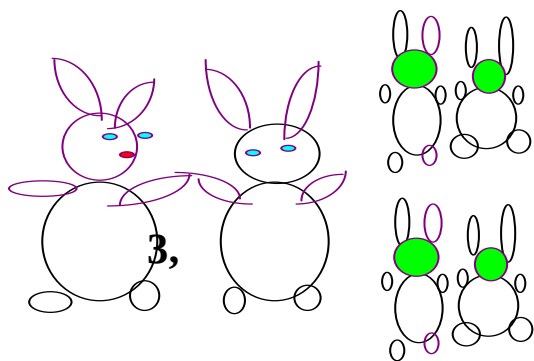
1



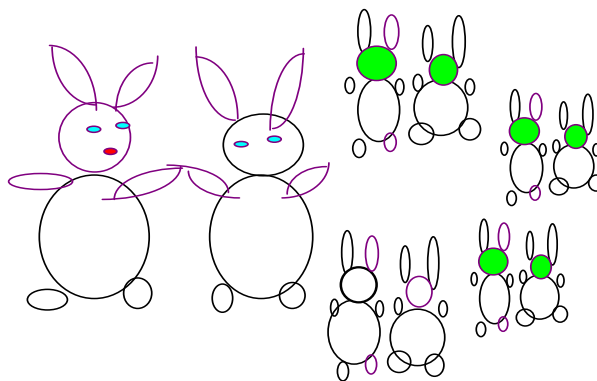
1



2



3



5



Леона́рдо Пиза́нский
лат. *Leonardus Pisanus*,
итал. *Leonardo Pisano*,
около 1170 - 1250,—
первый крупный математик
средневековой Европы.

Наиболее известен под
прозвищем **Фибона́ччи**.

Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

Непрерывные модели роста популяций

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

Обыкновенное
дифференциальное
уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение.
Правая часть не зависит
явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx \sin wt$$

x, t – переменные

a, b, d, w - параметры

Стационарное состояние

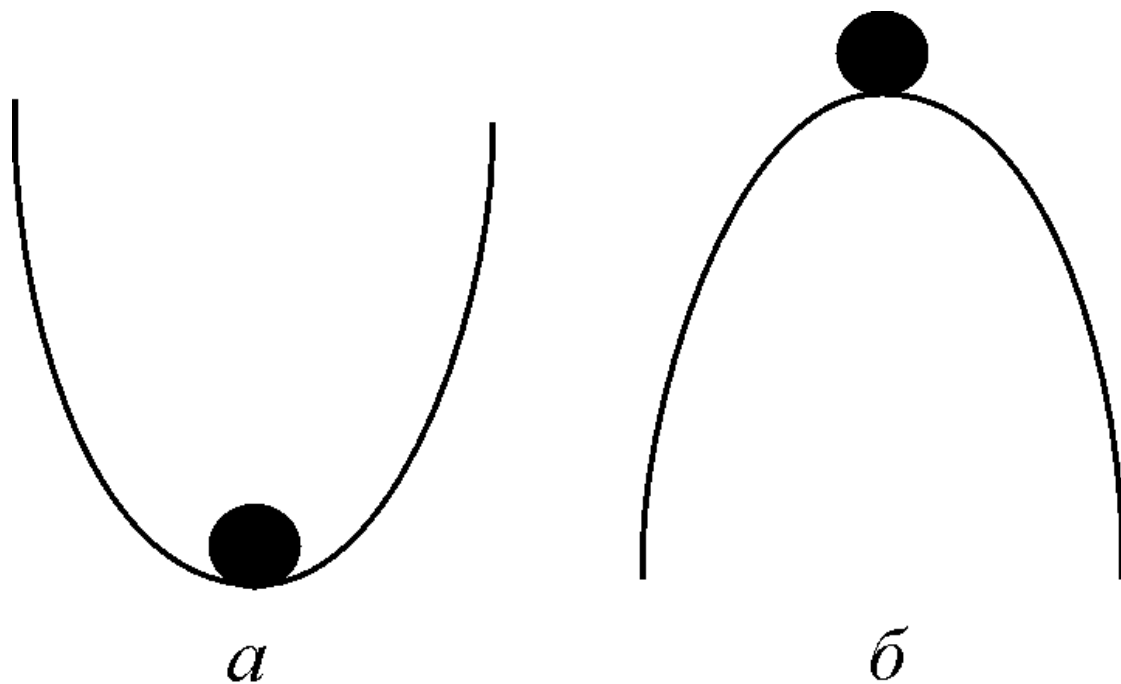
$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения
переменной x
равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть
уравнения
равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное
состояние
устойчиво, если
малые отклонения
с течением
времени остаются
малыми

Определение устойчивости по Ляпунову

Состояние равновесия (стационарное состояние) *устойчиво по Ляпунову*, если, задав сколь угодно малое положительное ε , всегда можно найти такое δ , что

если в начальный момент отклонение от стационарного состояния $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$

то для любого последующего момента времени

$$t_0 \leq t < +\infty$$

отклонение от стационарного состояния

$$|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$$



**Метод Ляпунова
исследования устойчивости
стационарного состояния**

**Метод линеаризации
функции в окрестности
стационарного состояния**

Брук Тэйлор (1685-1731)

■ Английский

математик, музыкант, живописец,
философ.

Формула Тэйлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда



Разложение функции в ряд Тейлора в точке $\bar{x}$

Формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n$$

(стационарное состояние)

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \dots$$

Выразим переменную x через отклонение от стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в ряд

Тейлора в точке $\bar{x}$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \dots$$

Отбросим члены более высокого порядка. Получим линеаризованное уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

C – произвольная постоянная. $C = \xi(0)$

Метод Ляпунова

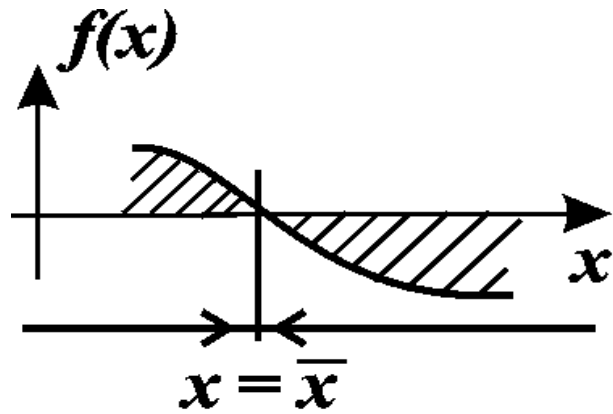
Устойчивость стационарного состояния уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

определяется знаком производной правой части в стационарной точке.

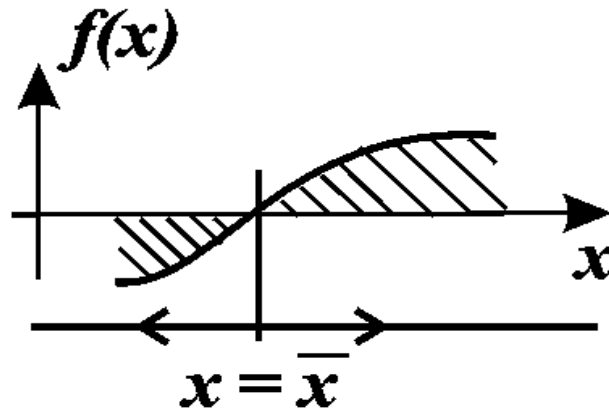
Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении $f(x)$ членов более высокого порядка

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



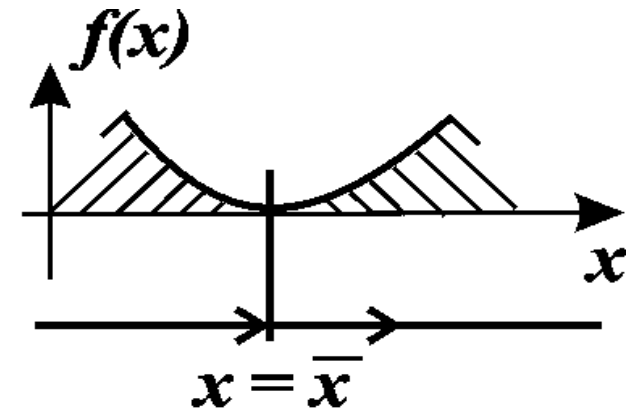
a

устойчиво



б

неустойчиво



в

неустойчиво

Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*

Модель экспоненциального роста Мальтуса

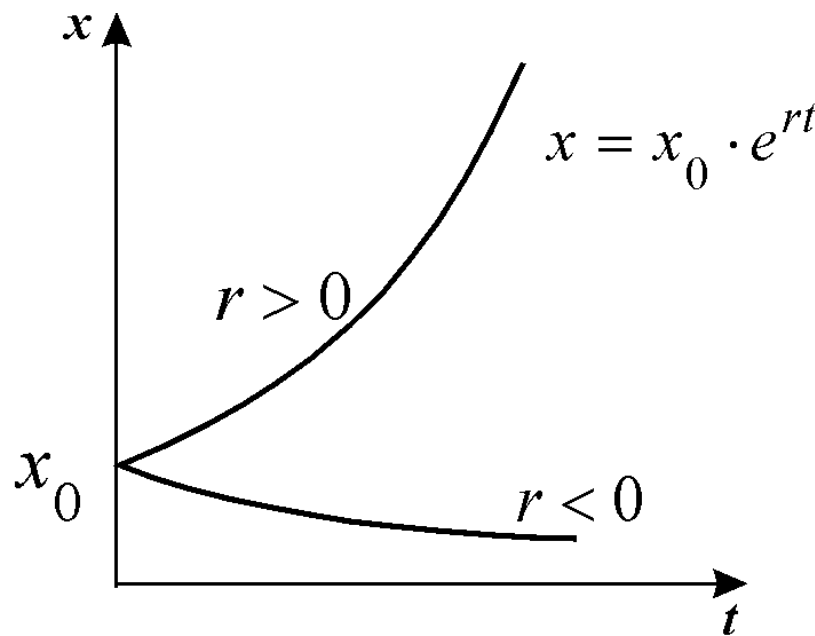
Malthus T.R. An essay on the principal of Population. 1798.
Charleston, BiblioBazaar, 2007.

Перевод на русский язык: Мальтус Т.Р. Опыт о законе роста
населения. Спб, Типография И.И. Глазунова, 1868

$$N_{t+1} = qN_t$$

$$N_{t+1} = q^n N_0$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



Thomas Robert
Malthus

1766-1834

Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

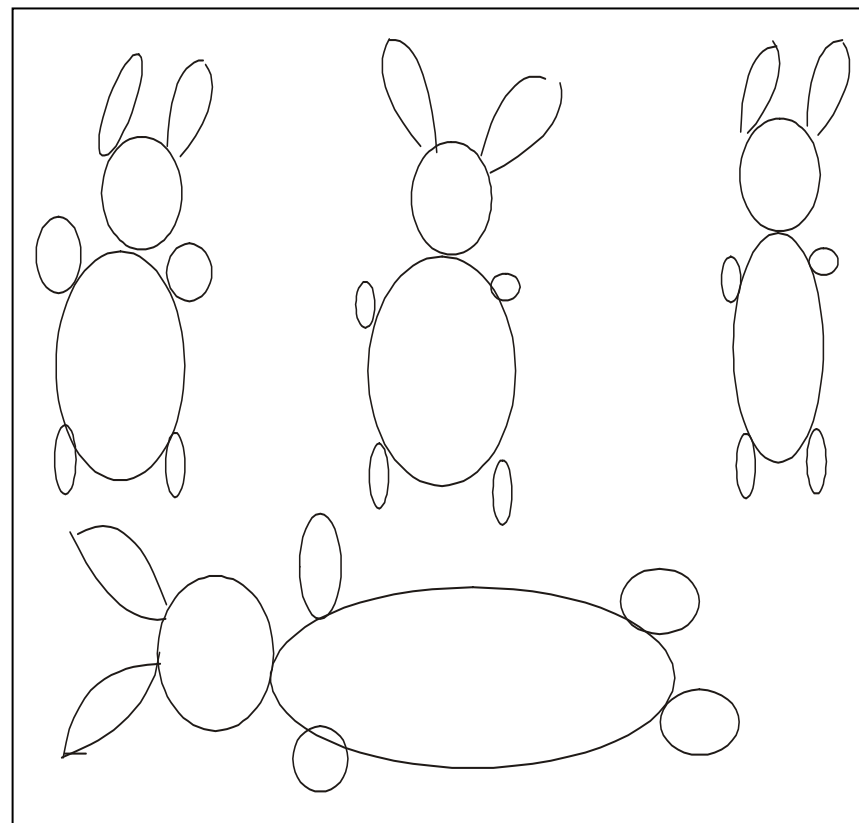
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. Et Phys.* **10**: 113-121, 1838

1804-1849

r – константа скорости роста
 K – емкость экологической ниши



K – системный фактор

Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

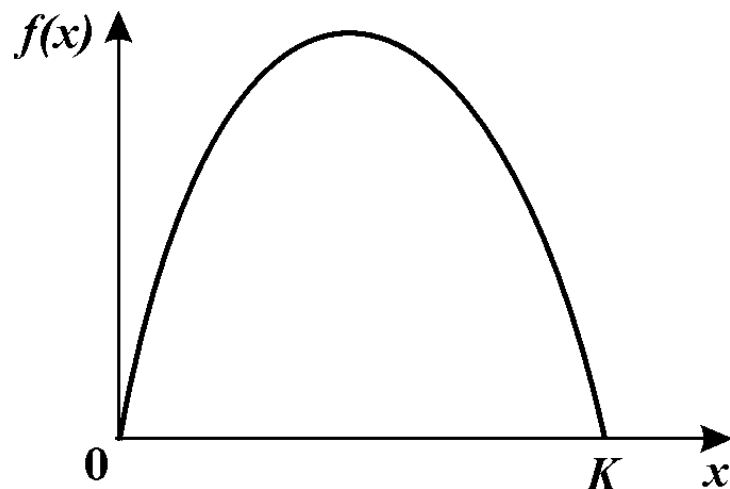
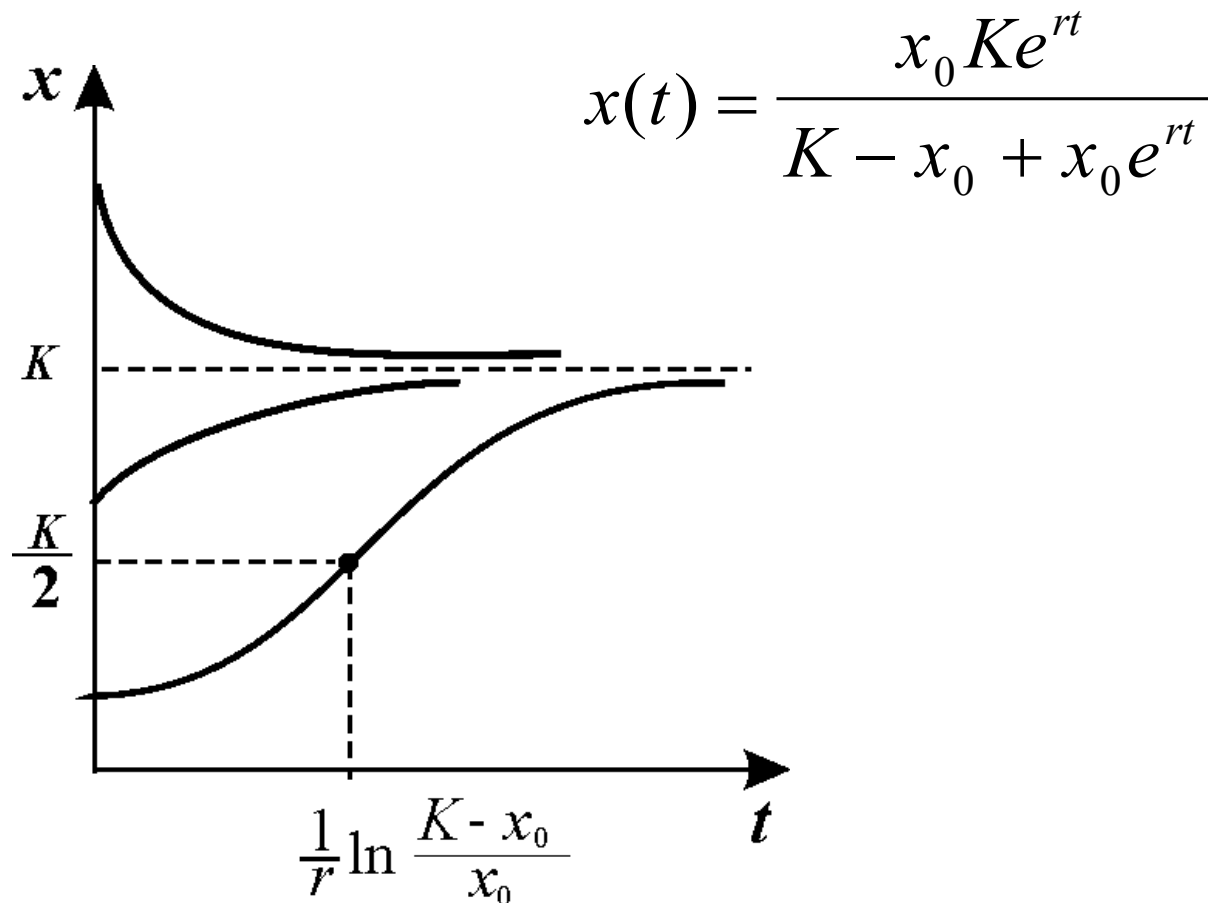


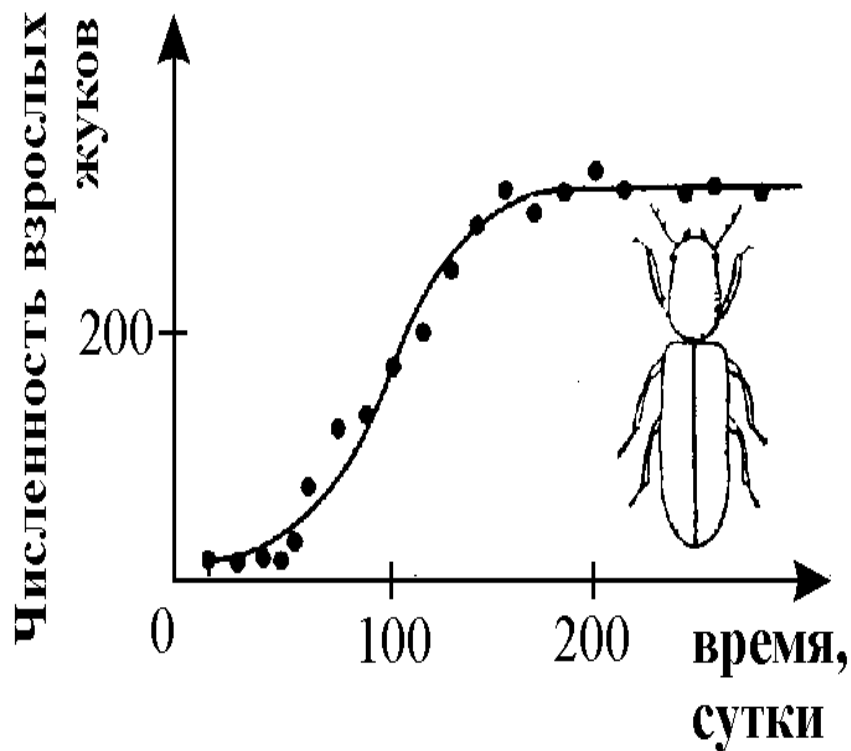
График функции $f(x)$



Поведение x во времени

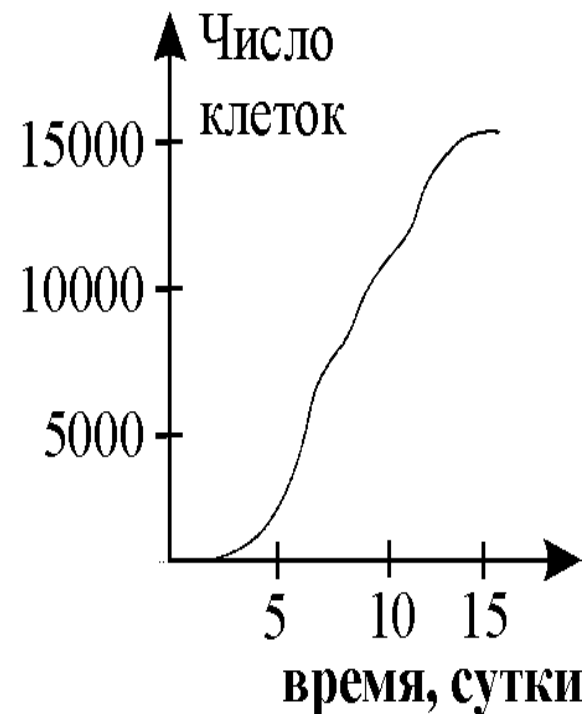
Ограниченный рост (уравнение Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



a

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).

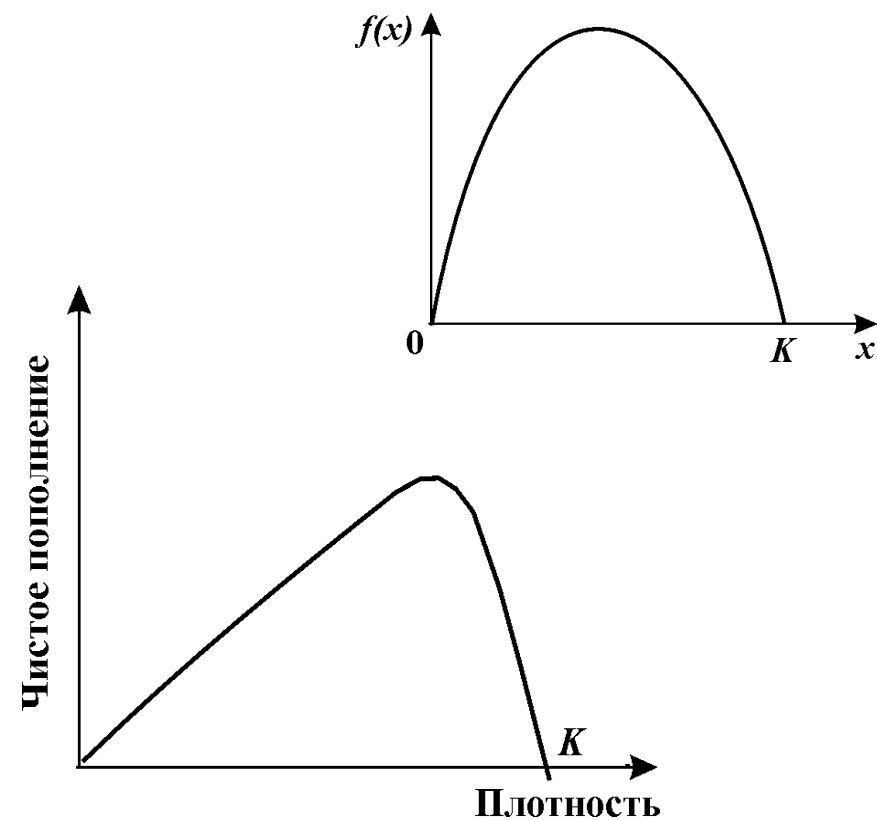
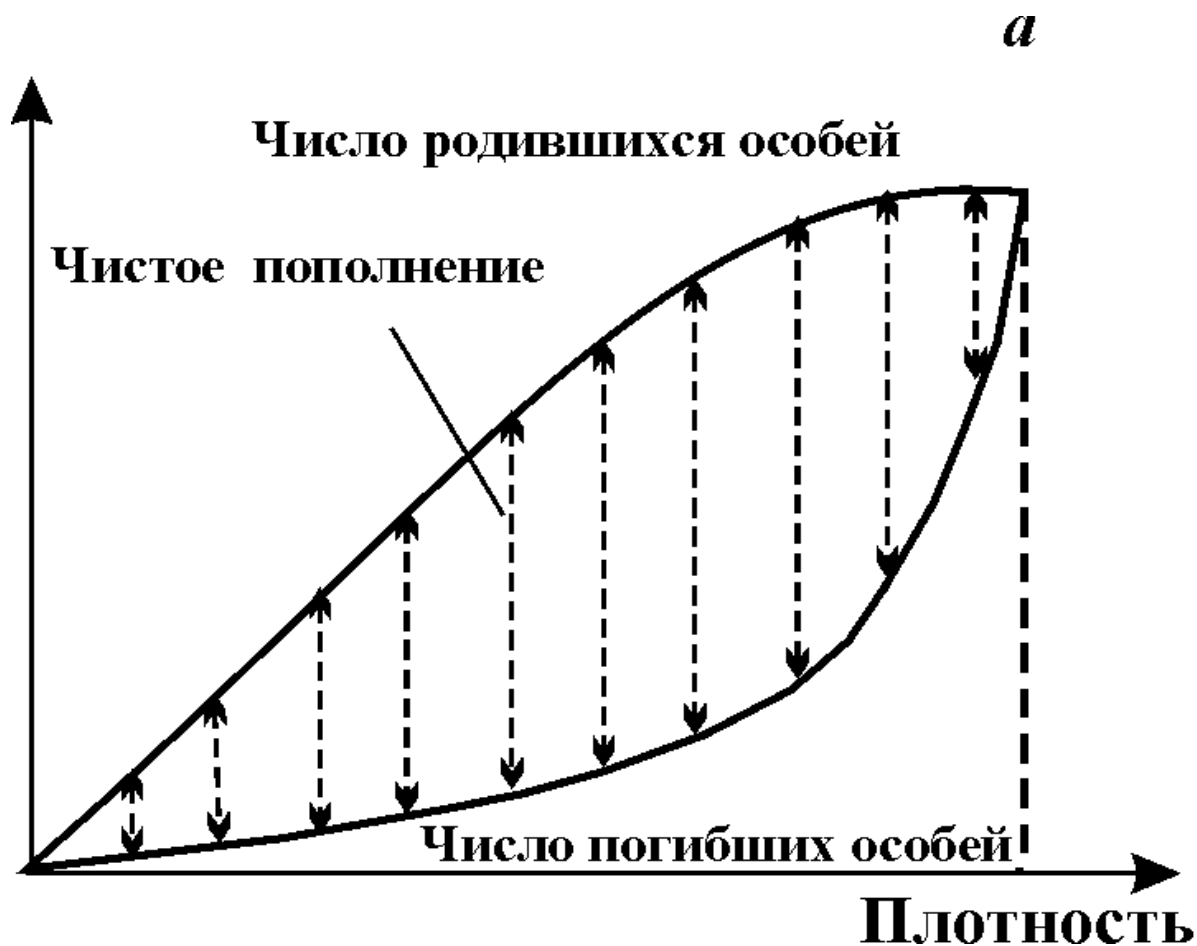


б

Водоросль *Chlorella* в культуре
(Pearsall, Bengry, 1940)

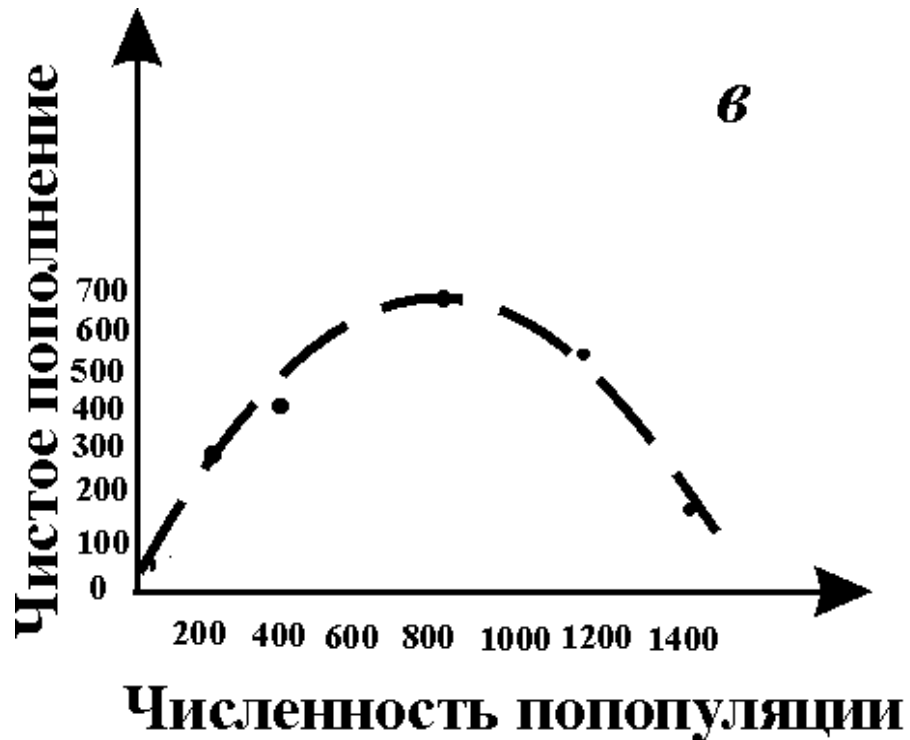
Кривые пополнения

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



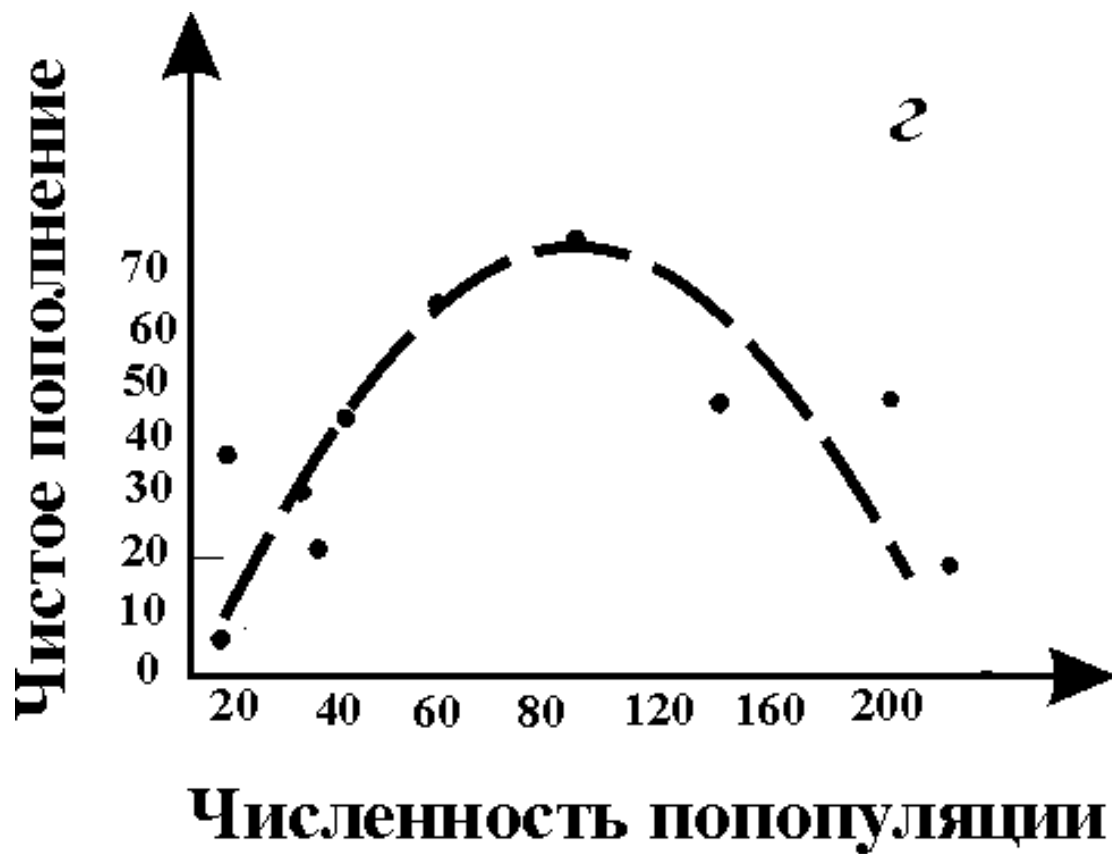
М.Бигон, Дж.Харпер, К.Таусенд
«Экология. Особи, популяции и сообщества»
т.1,2 М., Мир 1989

Примеры кривых пополнения (1)



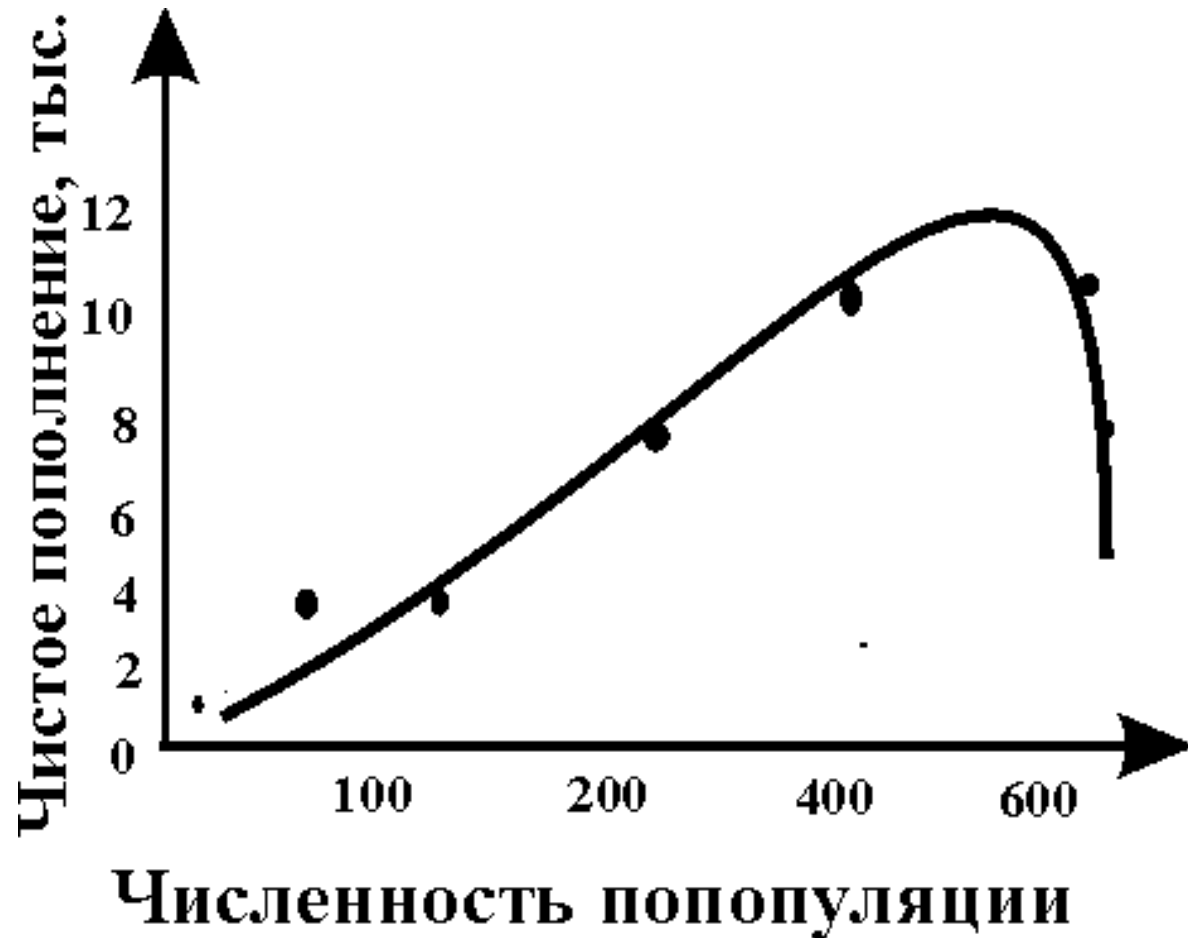
численность фазана
обыкновенного
на о. Протекшн - Айленд
после его интродукции в
1937 г.
(Einarsen, 1945);

Примеры кривых пополнения (2)



экспериментальная
популяция плодовой
мушки *Drosophyla
melanogaster*
(*Pearl, 1927*)

Примеры кривых пополнения (3)

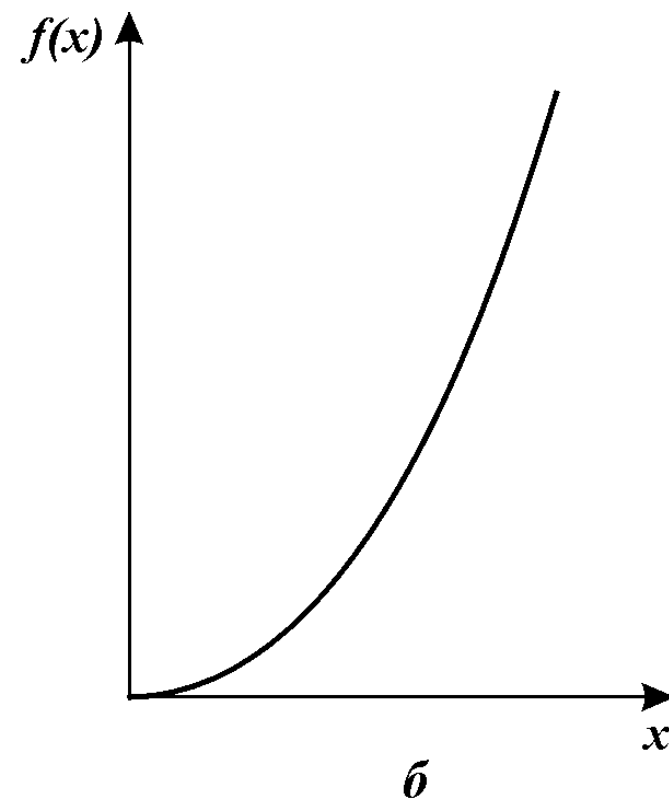
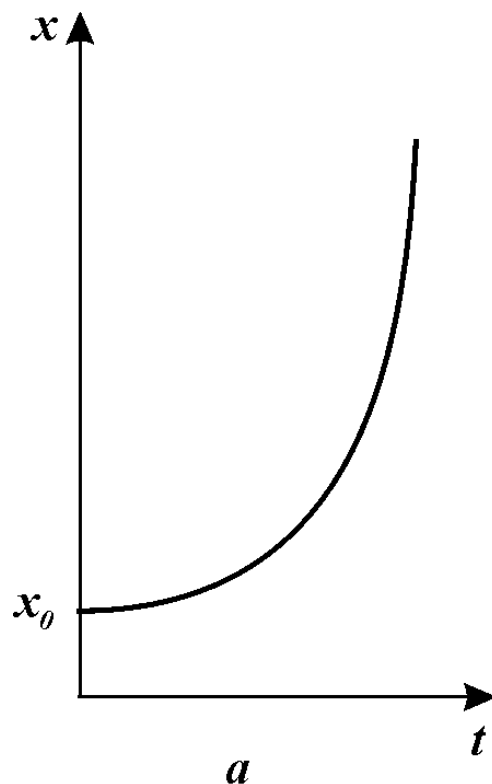


оценка численности
арктического финвала
(Allen, 1972)

Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

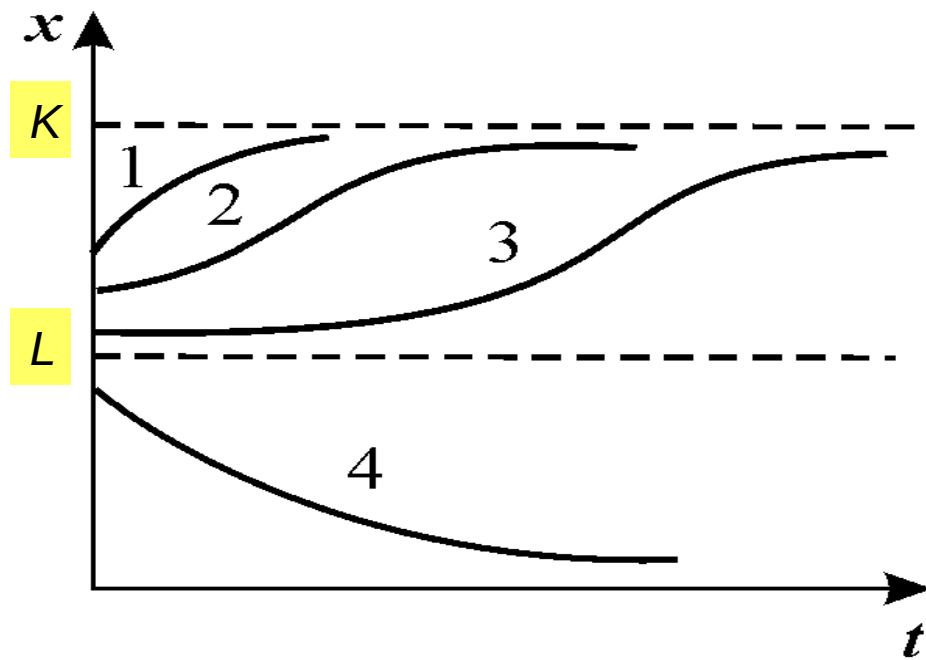
$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$



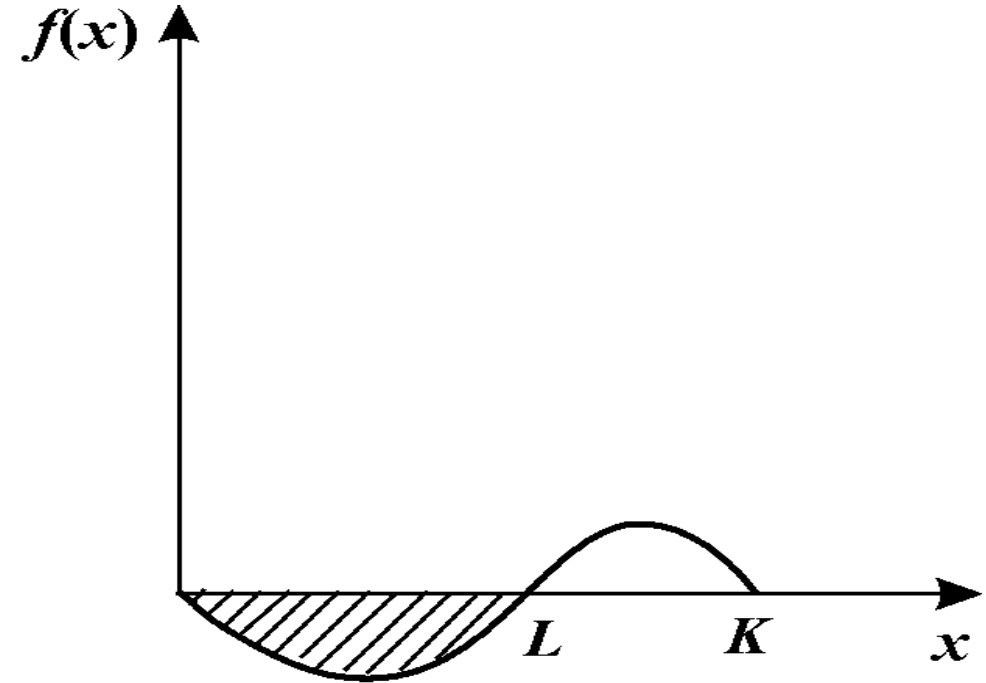
При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.

При высоких – числу самок в популяции.

Наименьшая критическая численность

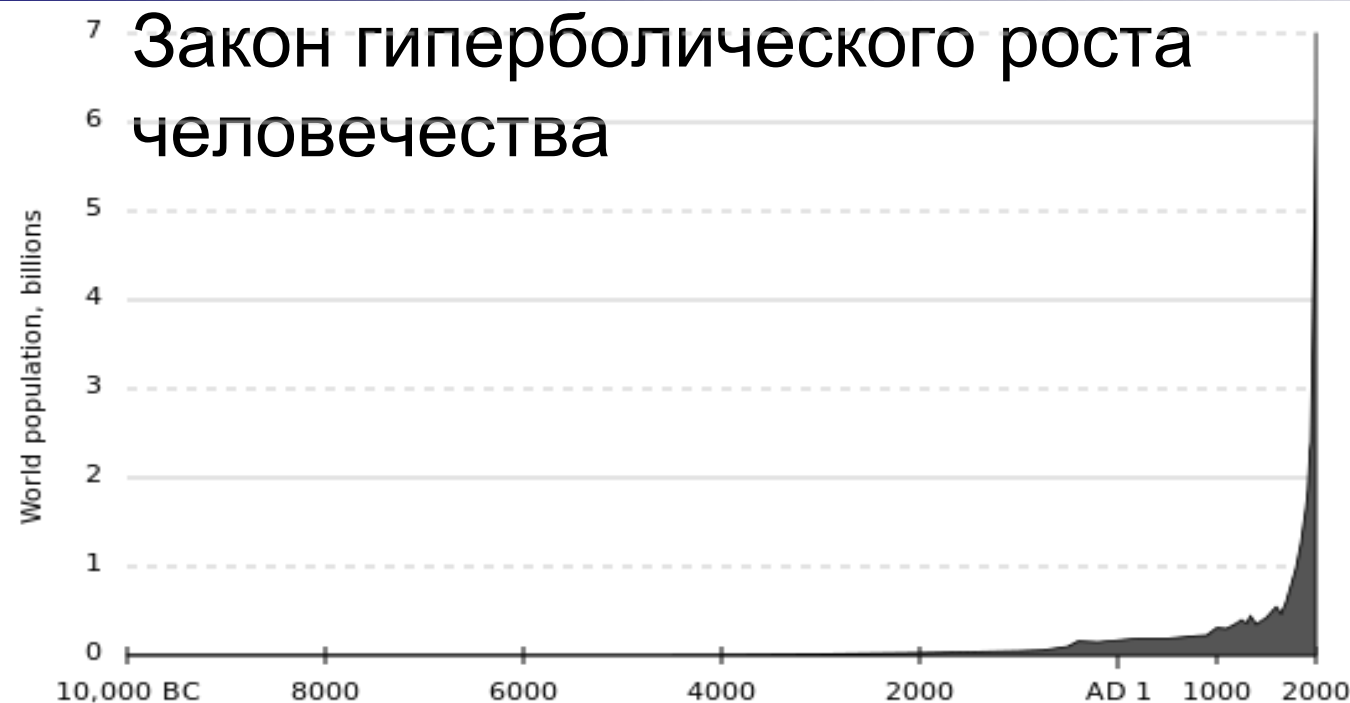


a



b

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$



- *Heinz von Foerster, Patricia M. Mora, Lawrence W. Amiot. **Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026.** At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia // Science. — 1960. — № 132. — С. 1291—1295.*

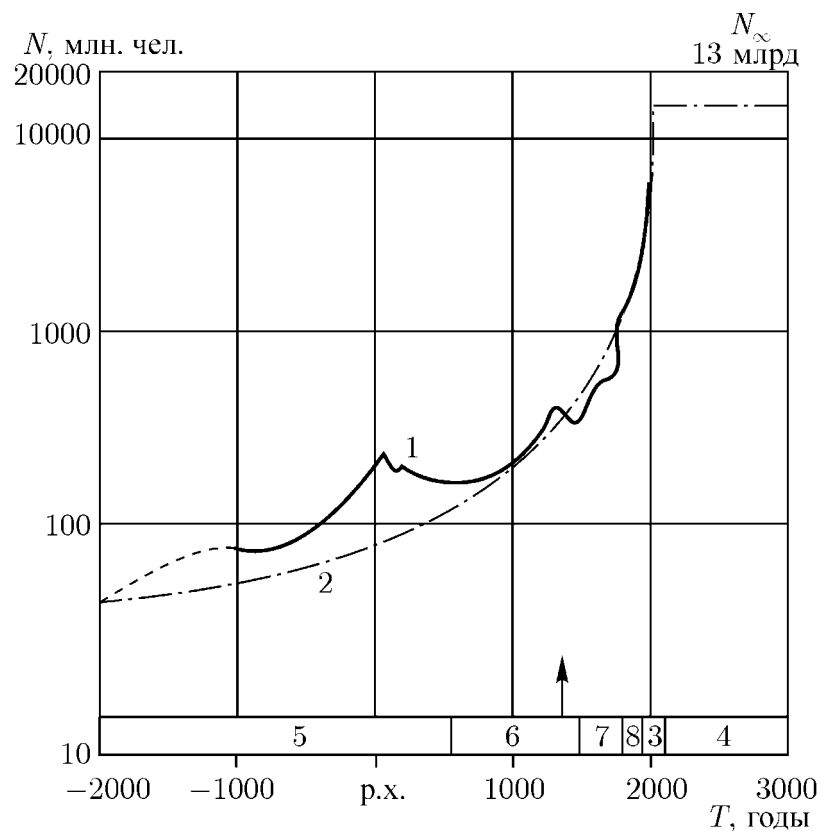


Хайнц фон
Фёрстер
1911-2002
Физик, математик,
демограф



Динамика численности человечества

$$\tau \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{K^2} \quad N(T) = \frac{K^2 \tau}{T_{crit} - T}$$

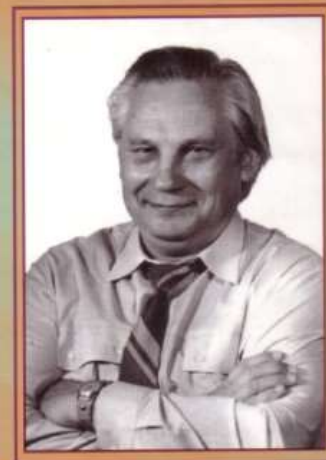


Сергей Петрович Капица (1928-2012)

Общая теория
роста человечества 1999

Г.Ю.Ризниченко, А.Б.Рубин
Биофизическая динамика продукционных
процессов. Глава 8

Изд. Юрайт 2016, часть 2



С.П. КУРДЮМОВ

РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИЯ ИДЕИ

Сергей Павлович
Курдюмов

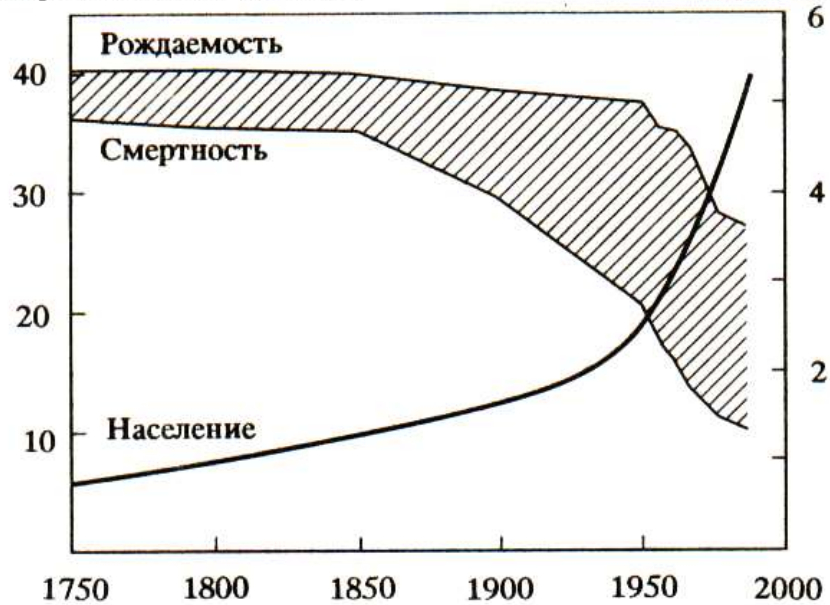
1929-2004

- каждую секунду рождается 21 и умирает 18 человек, население Земли ежедневно увеличивается на двести пятьдесят тысяч человек, ежегодно – на 90 млн человек

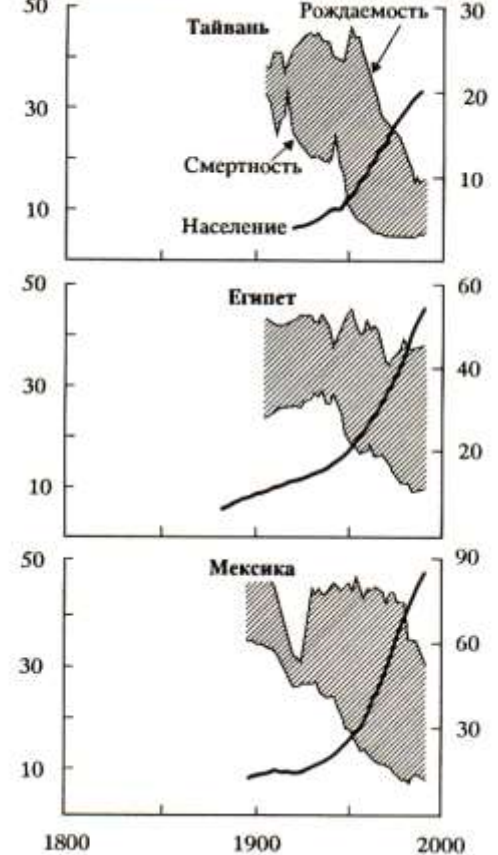
$$N = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \times 10^9}{2025 - T}, \quad (1)$$

Прирост численности населения (пополнение)

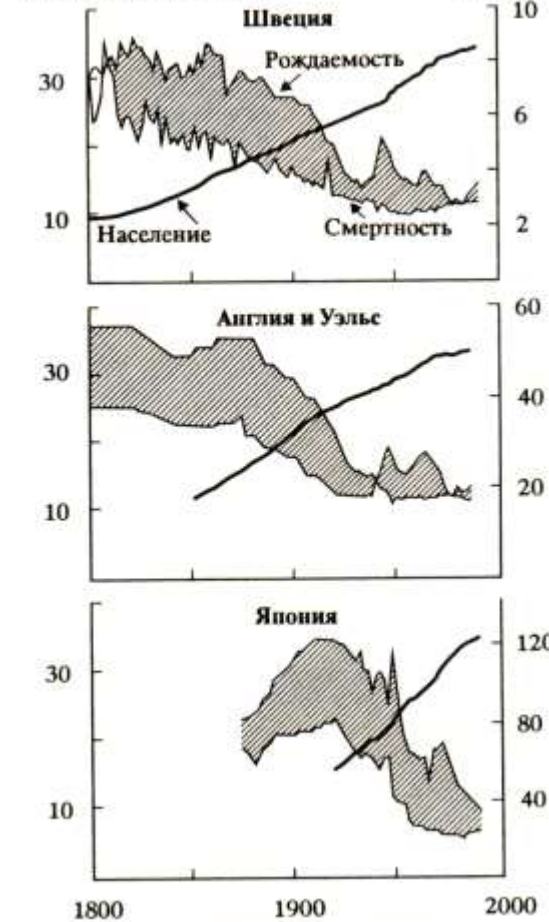
Количество родившихся и умерших на 1000 чел. в год



Количество родившихся и умерших на 1000 чел. в год, чел.



Количество родившихся и умерших на 1000 чел. в год, чел.



$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{T_1 - T}{\tau},$$

С учетом демографического перехода

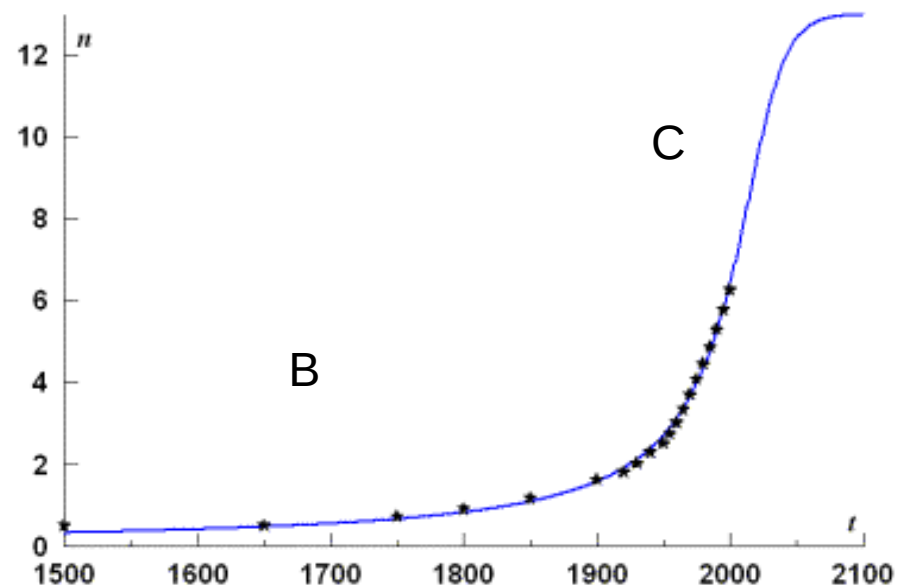
$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcsctg} \frac{T_1 - T}{\tau},$$

$$C = 186 \times 10^9 \text{ лет}, T_1 = 2007 \text{ год}, \tau = 42 \text{ года},$$
$$K = \sqrt{C/\tau} = 67000.$$

n_t – численность на момент
демографического перехода

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2(n_t - n)}{C / n_t}$$

Численность человечества



В первой - эпохе А, длительностью 2,8 миллиона лет - происходит линейный рост, переходящий затем в гиперболический рост эпохи В, который завершается после 1965 года демографическим переходом С.

После демографического перехода прирост численности на протяжении жизни поколения становится сравнимым с самим населением мира. И численность начнет стремиться к асимптотически стабилизированному режиму эпохи С, то есть неуклонно приближается к пределу в 14 миллиардов. Это в 2,5 раза больше, чем в настоящее время.

Модель глобального роста

- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень
- Альберт Эйнштейн
- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука, 1978
- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Meadows D. et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974
- Медоуз Д. и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991
За пределами роста 1994
Пределы роста 30 лет спустя. 2008

Принятие мер в 1980 году

Тренды 1970 х

Состояние мира



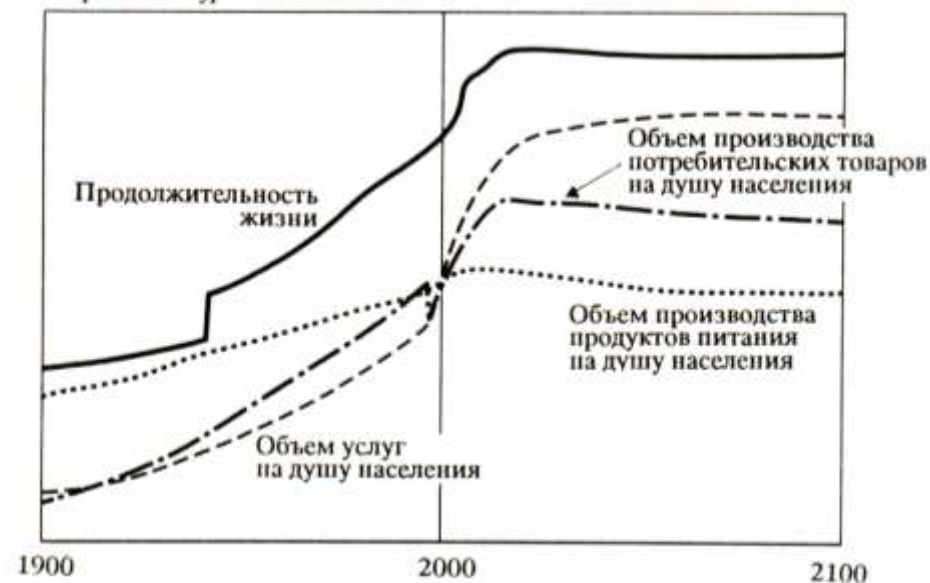
Материальный уровень жизни



Состояние мира

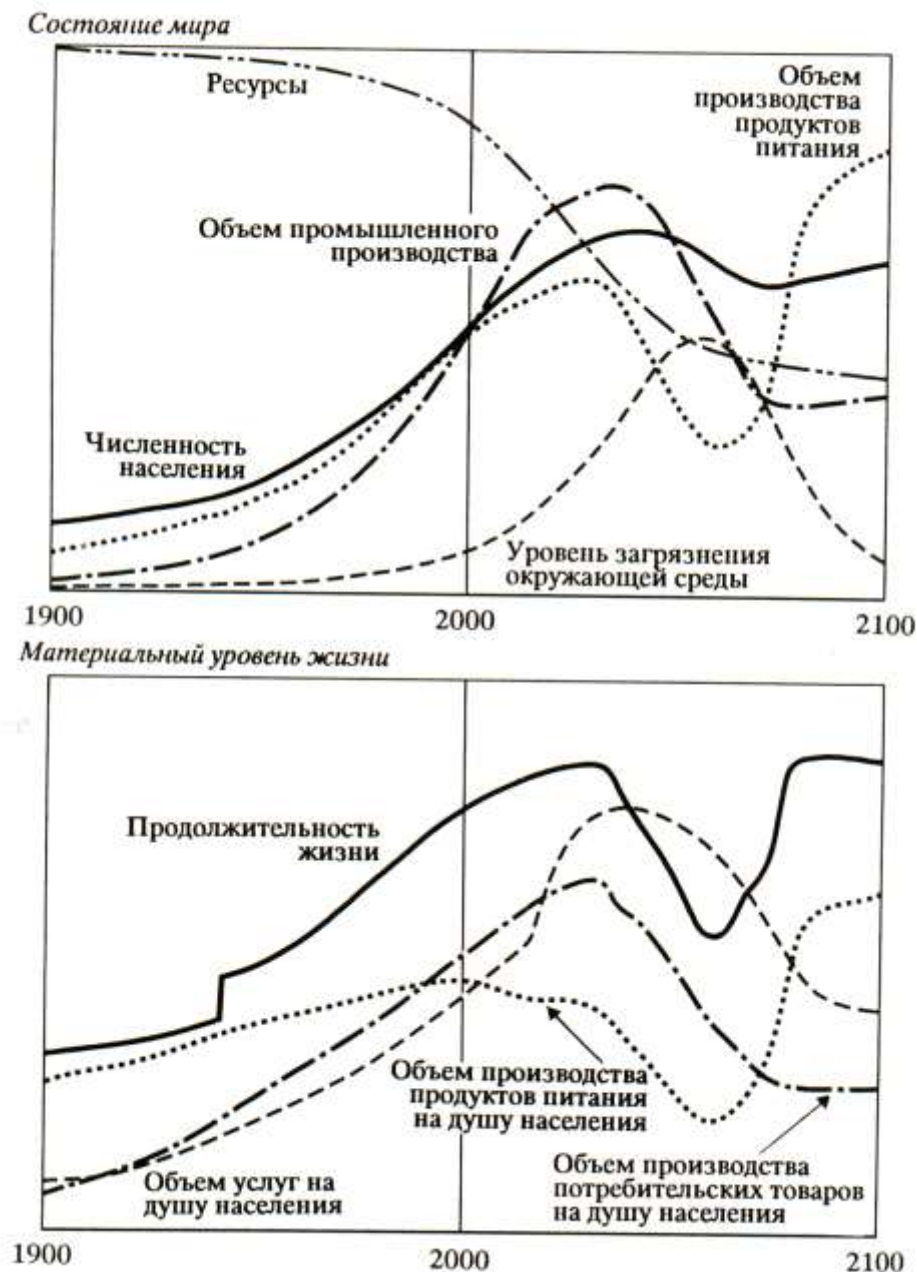


Материальный уровень жизни



Принятие мер в 2015 году

Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса



Численность населения Земли, млрд

Данные и прогноз
отдела
народонаселения
ООН

Вероятностный прогноз Сергея Щербова,
заведующего лабораторией динамики и прогнозирования
численности населения в венском Институте демографии

Оценка Бюро переписи США

По оценке демографа Бюро населения США Карла Хауба,
за всю историю человечества было рождено около

108 миллиардов человек

6,5% из них живут в наше время

Население Земли
достигло миллиарда

1804
1

1927
2

20.10.1959
3

27.06.1974
4

21.01.1987
5

5.12.1998
6

31.10.2011
7

2050
9,4

2,50

Вероятность
95 %

60%
20%
медиана

2,00

1,75

1,50

1,25

1,00

0,75

Прогноз Щербова:
численность населения
Земли при предельных
уровнях рождаемости
от 0,75 до 2,5 детей
на женщину и при росте
продолжительности
жизни до 120 лет



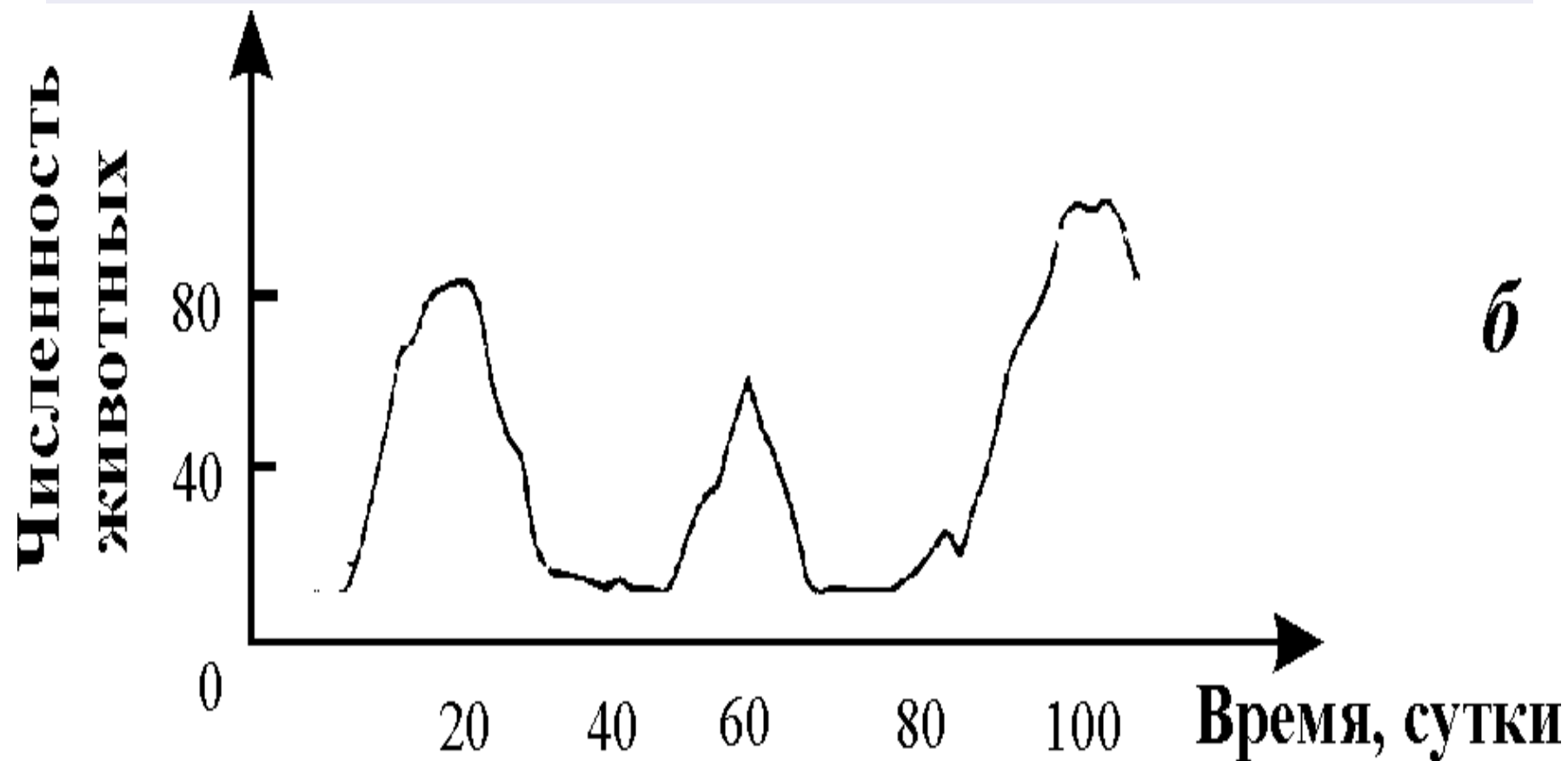
Динамика численности популяции

- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

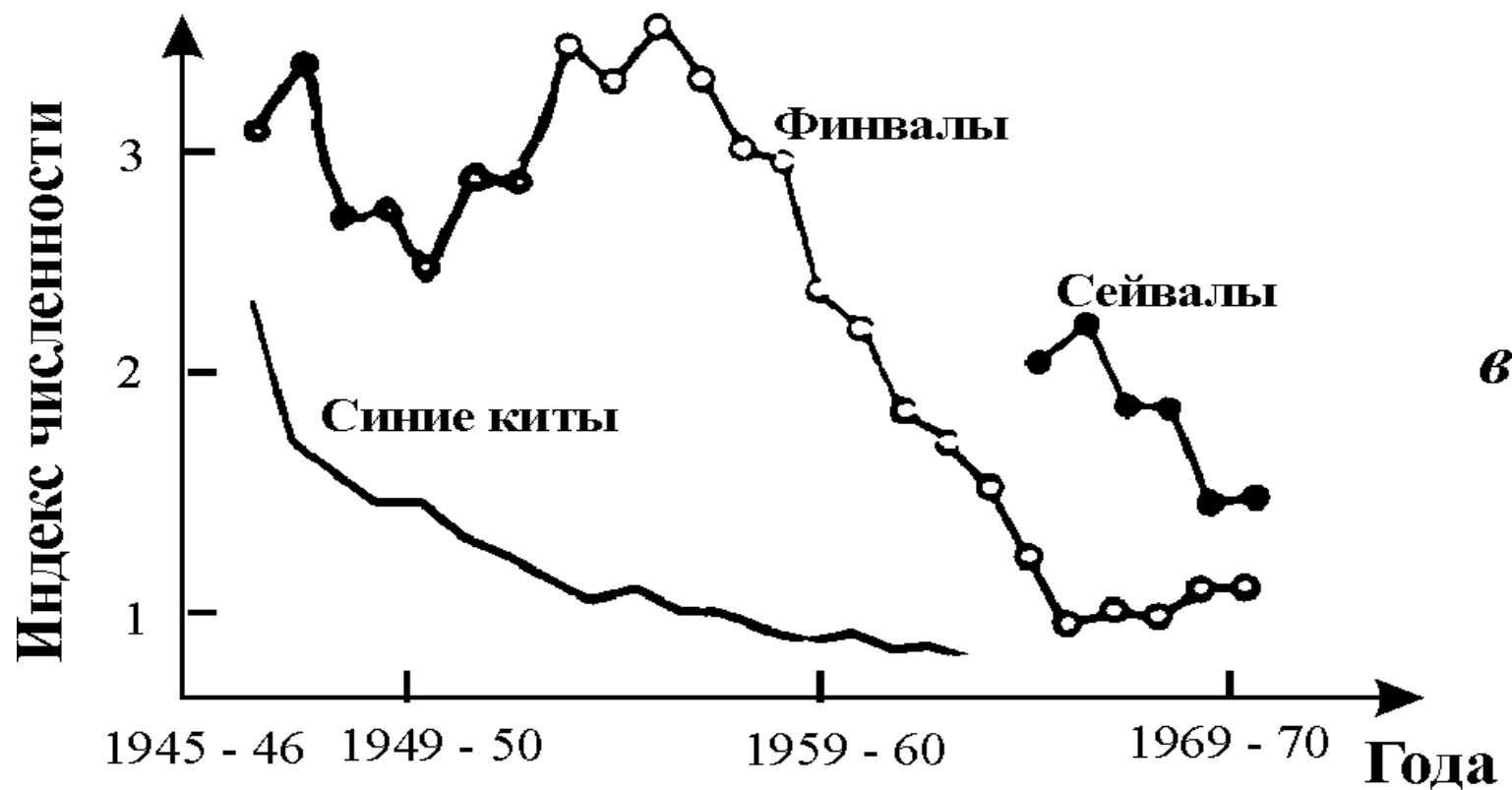
Численность поголовья овец на
острове Тасмания (*Davidson, 1938*)



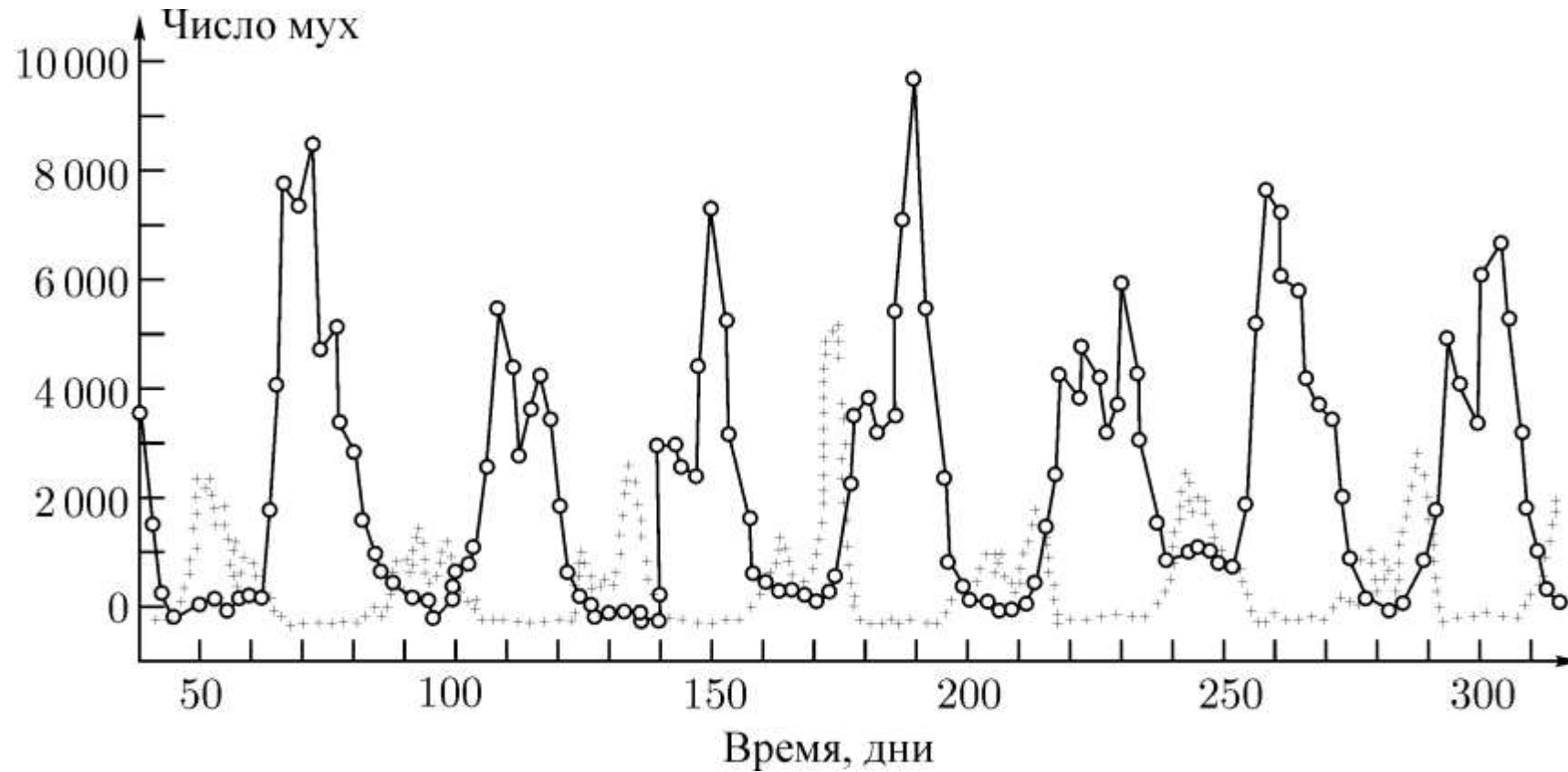
Изменение численности *Daphnia magna* (Frall, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике
(приведена по изменению «индекса численности» убитых китов
на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland*, 1971)



Численность мух *Lucilia* в популяционном ящике (Nicholson, 1954) 1 – взрослые особи.
Крестики – число яиц, отложенных за один день





Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Дискретные модели популяций

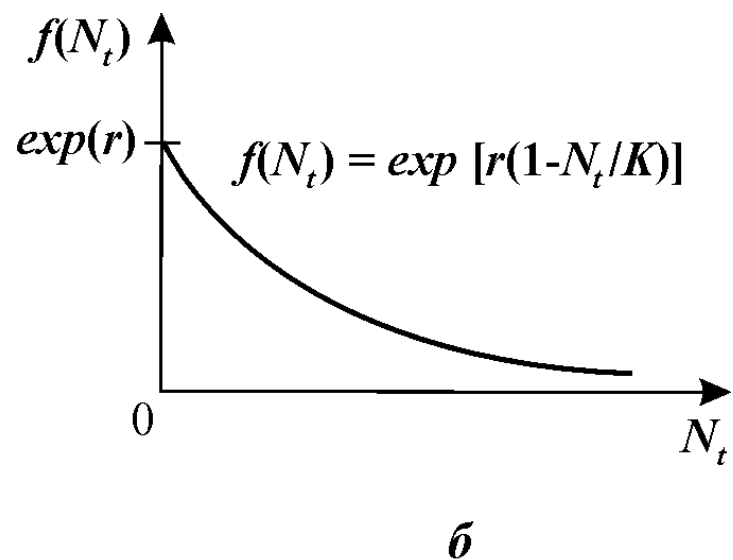
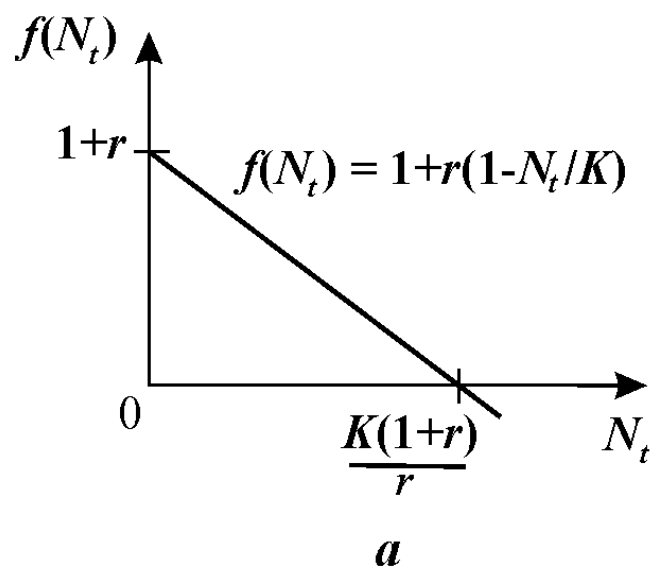
Монотонный и немонотонный рост
Колебания
хаос

Дискретный аналог логистического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$N_{t+1} = N_t \left[1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right]$$

$$N_{t+1} = N_t \cdot f(N_t).$$



(Moran, 1950)
для численности насекомых

(Ricker, 1952) для рыбных
популяций.

Robert May

1976. Simple mathematical model
with very complicated dynamics.

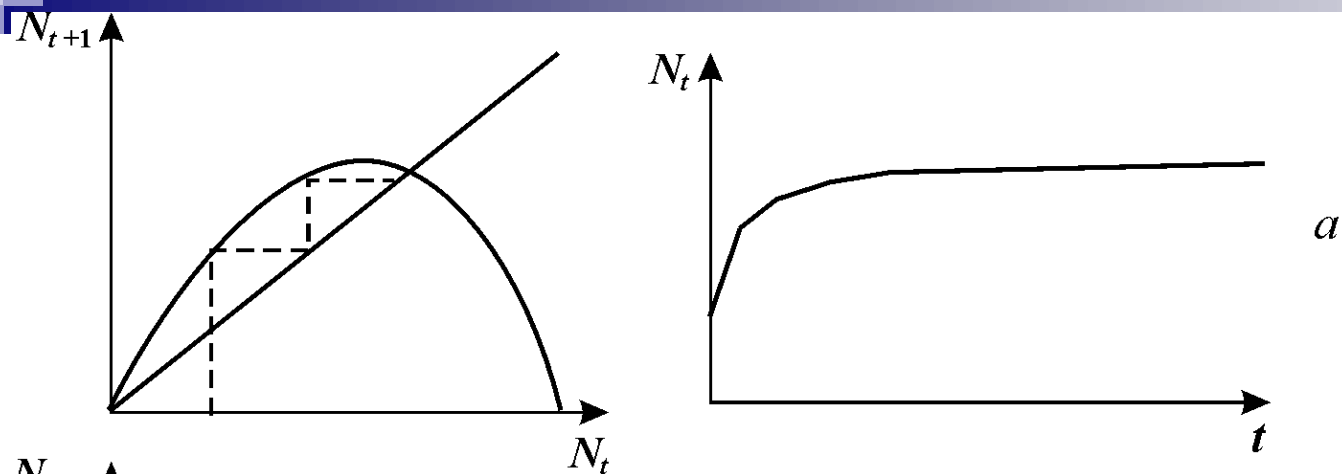
Nature 261, p.459

1986. When two and two make four:
Nonlinear phenomena in ecology.

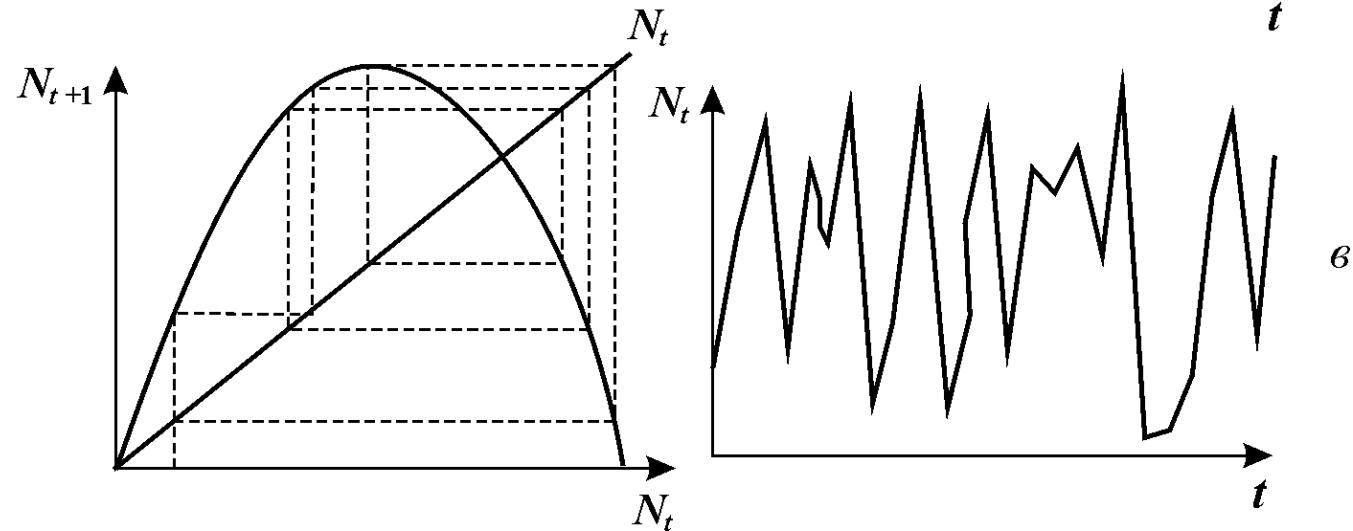
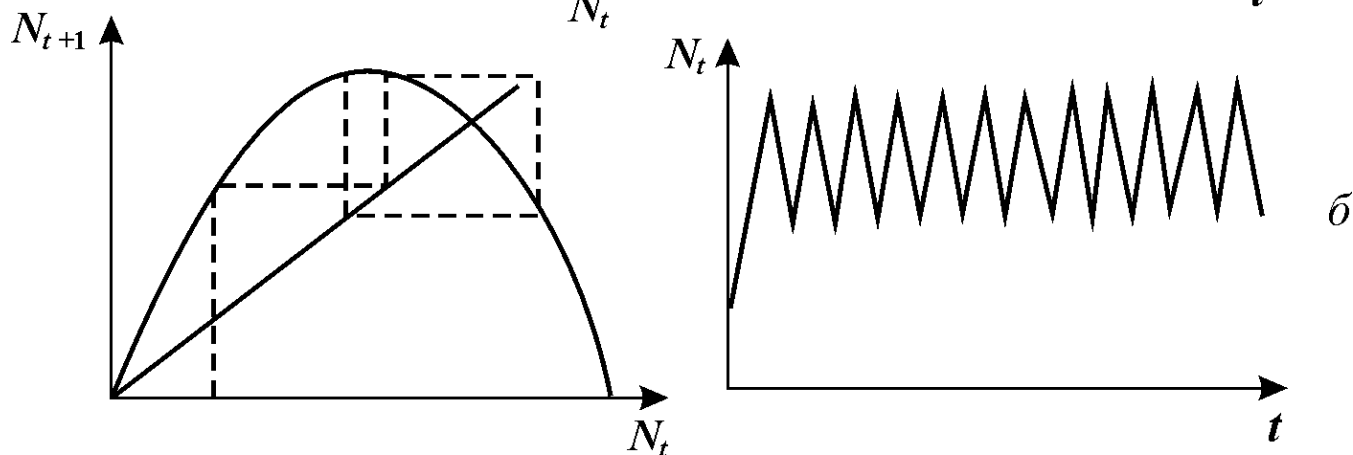
Proc.R.Soc. London v.228: p.241-268



- Вероятно, для всех нас было бы гораздо лучше, если бы не только при обучении или в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно большее число людей поняло, что простые динамические системы не обязательно демонстрируют простое поведение.

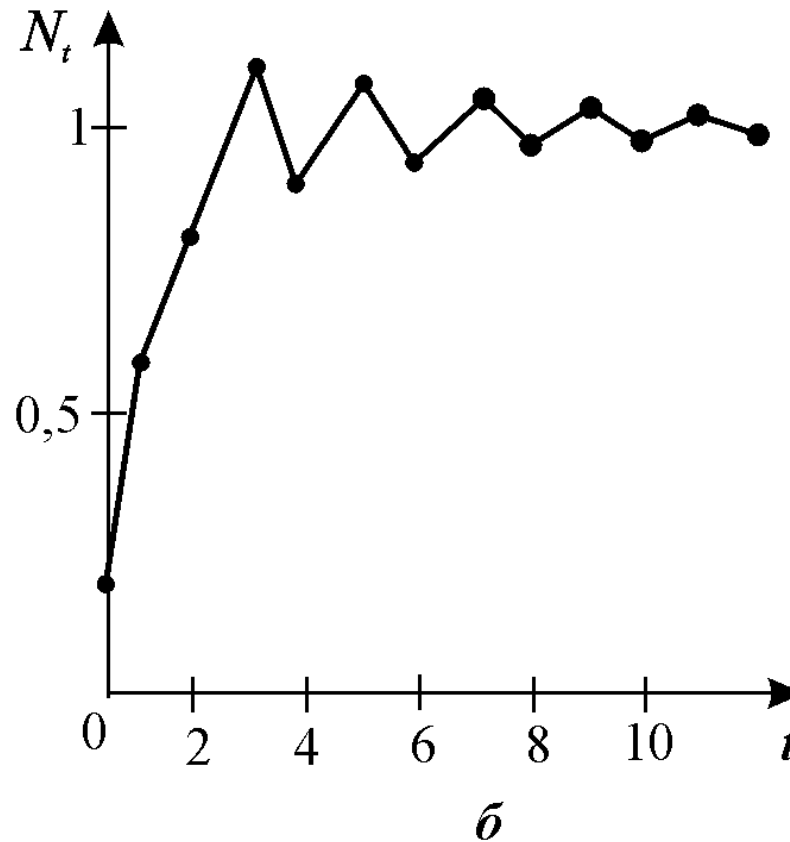
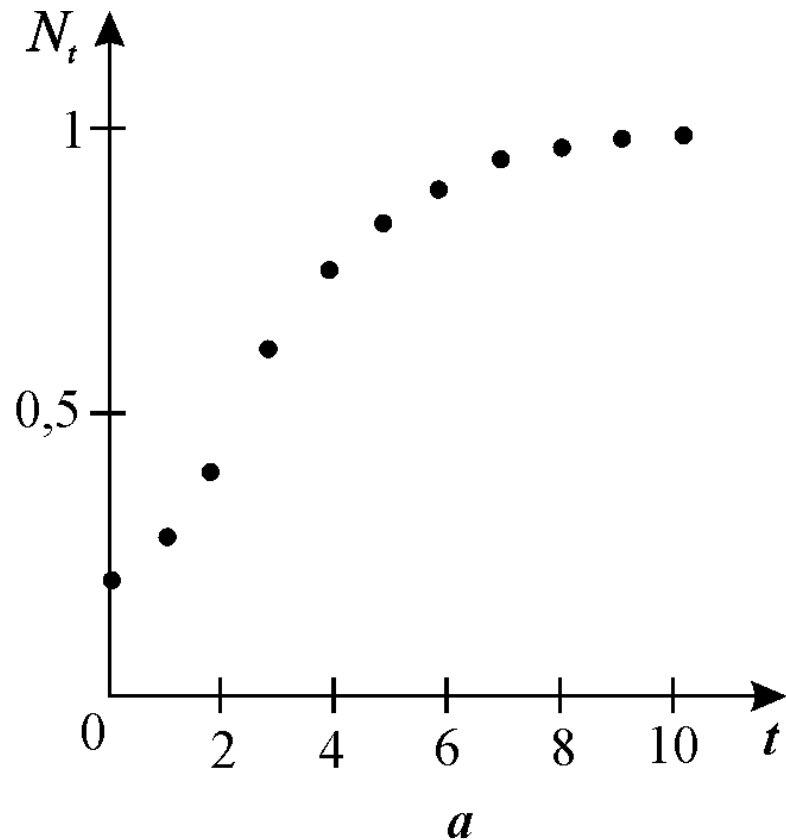


Квадратичное
отображение



$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

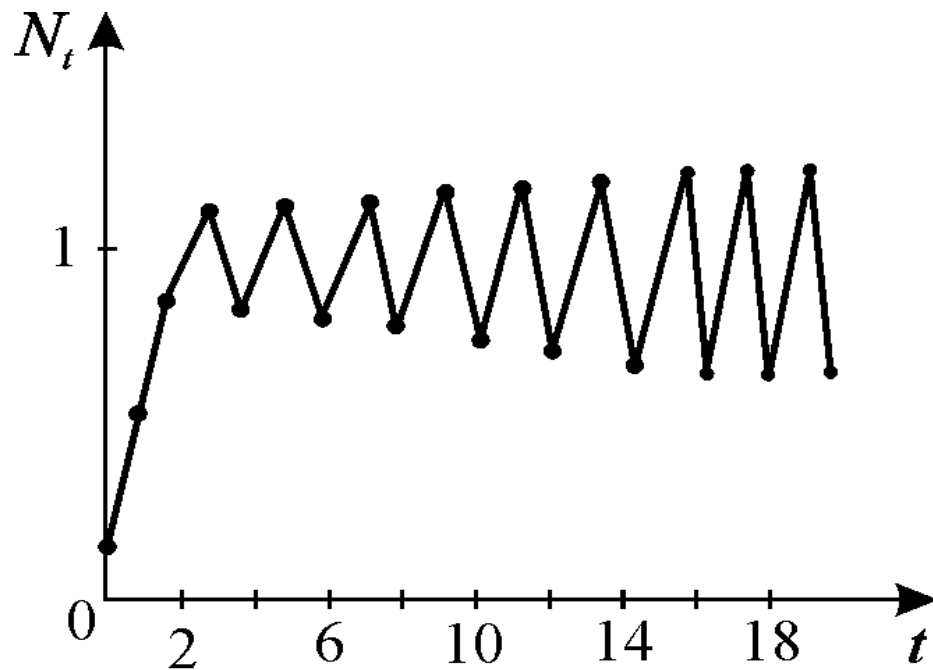
*Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет
собой затухающие колебания при $1 < r < 2$.*



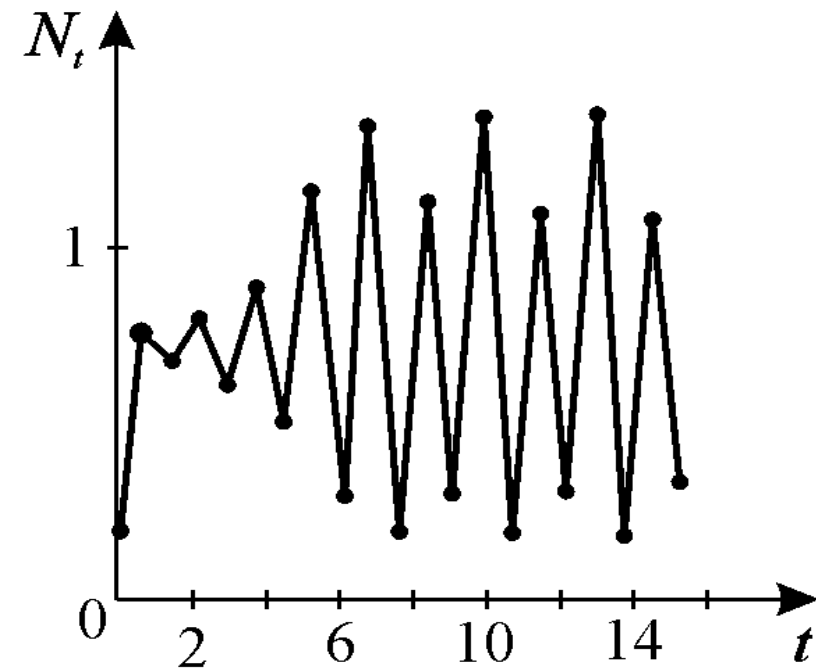
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы

при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$.



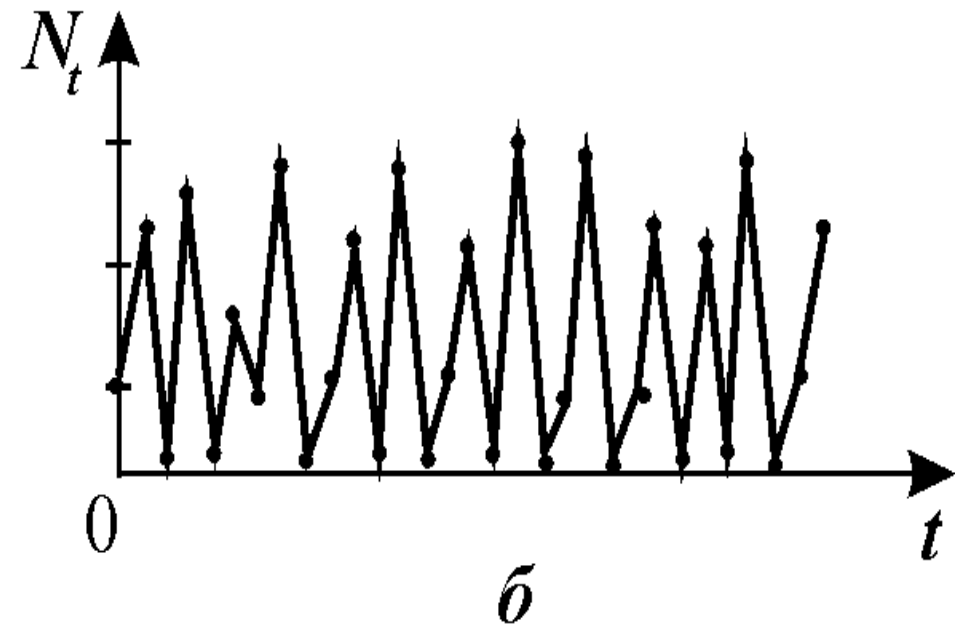
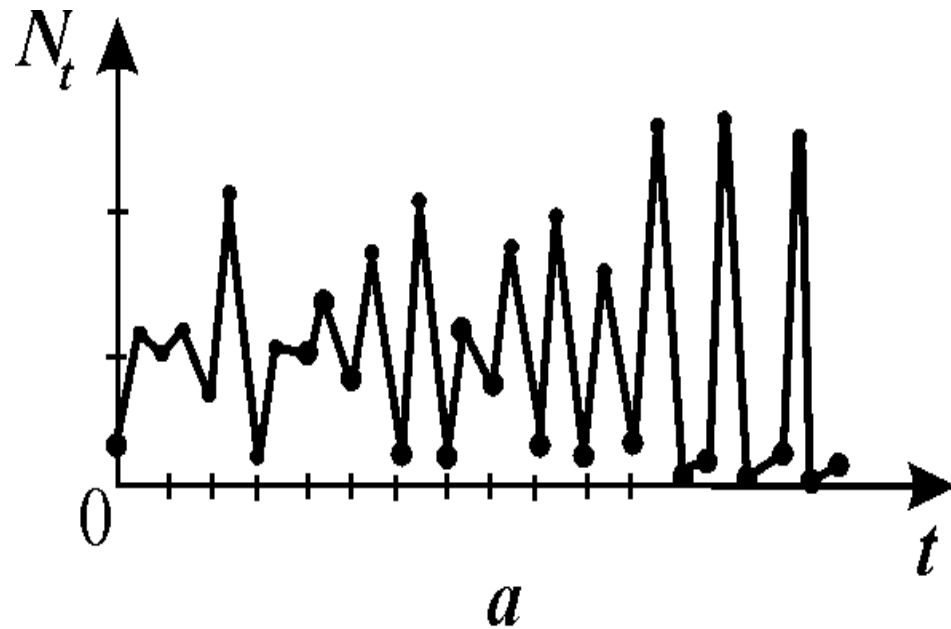
a



б

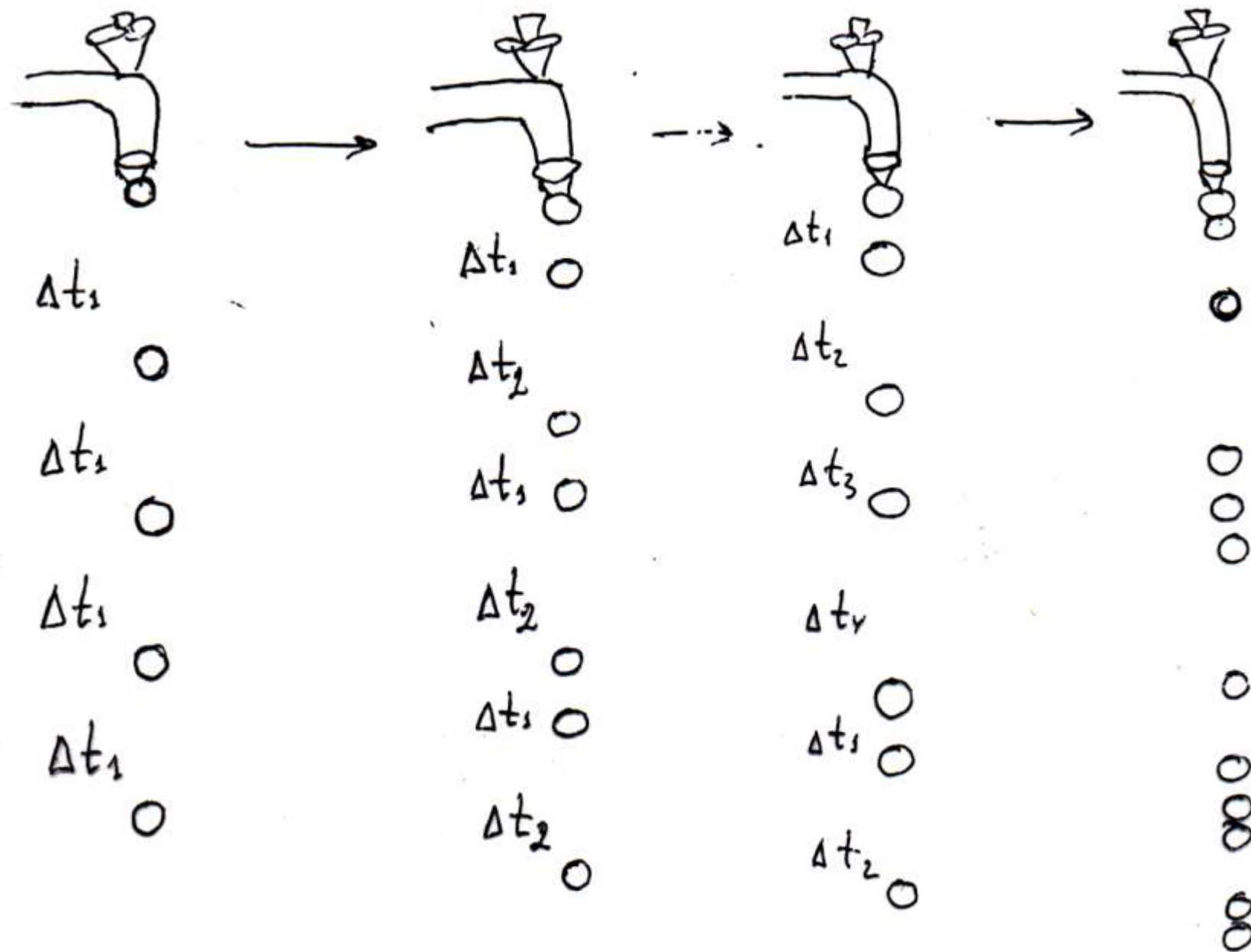
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистокастические решения*.

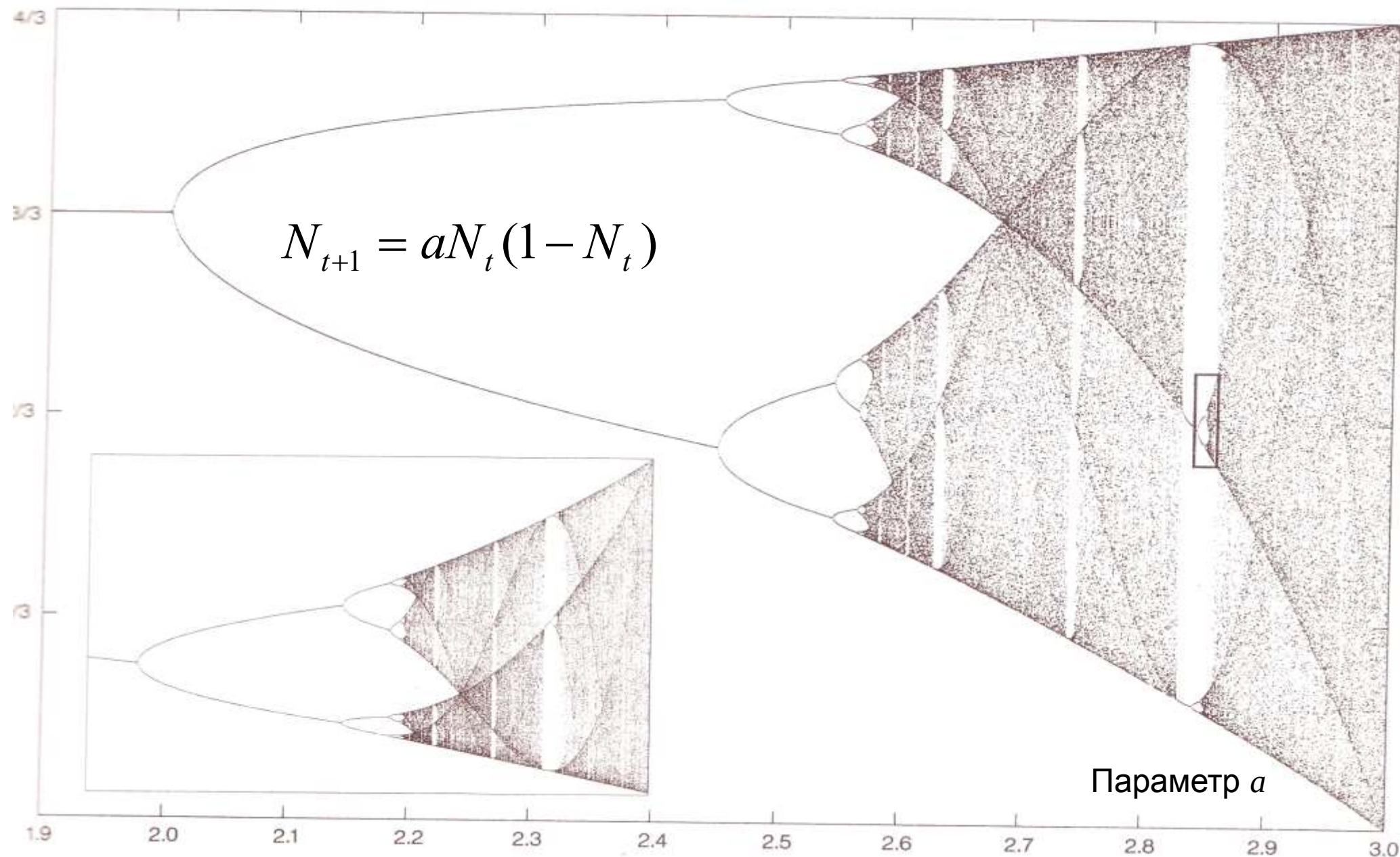


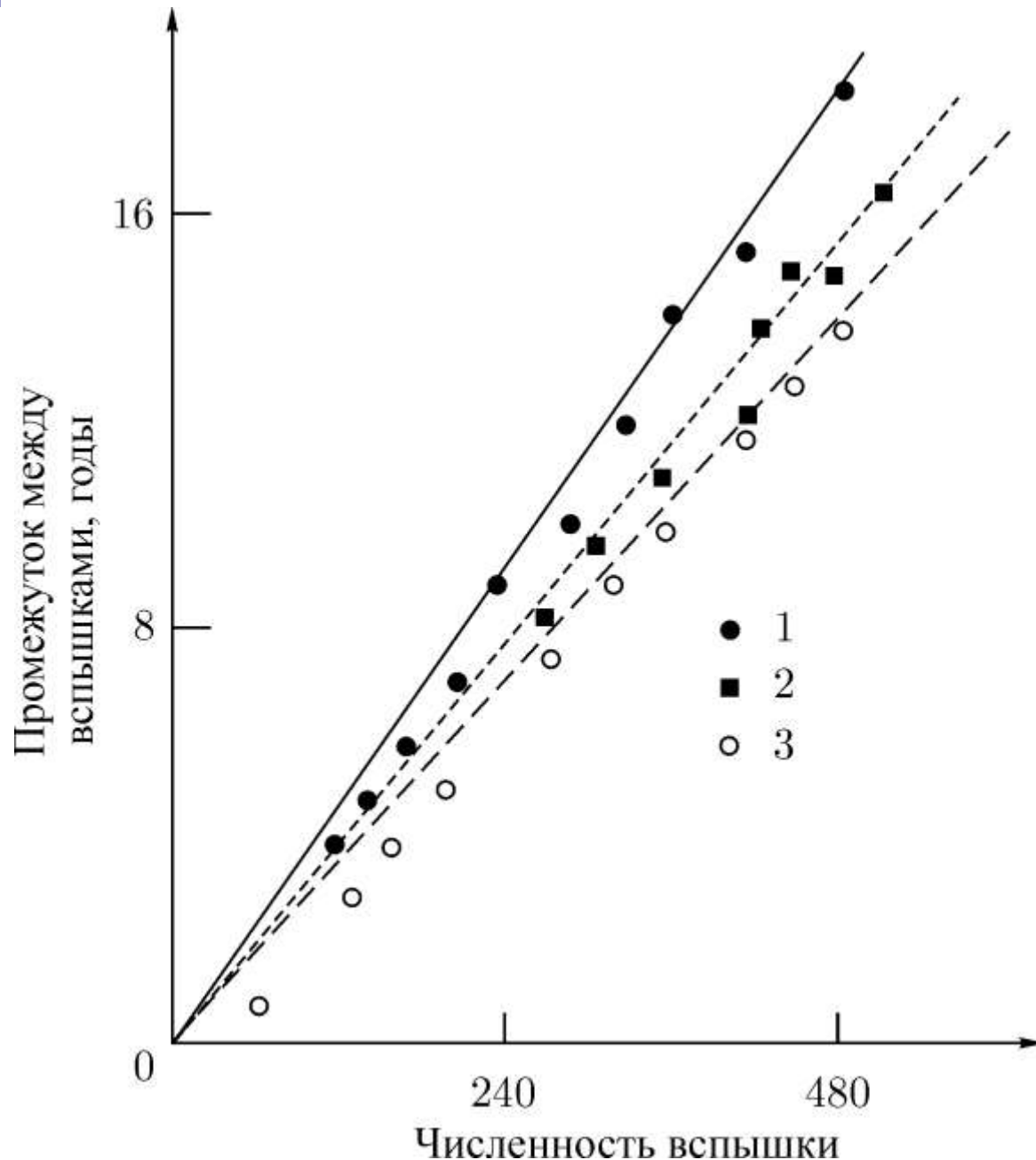
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

Переход к хаосу через удвоение периода



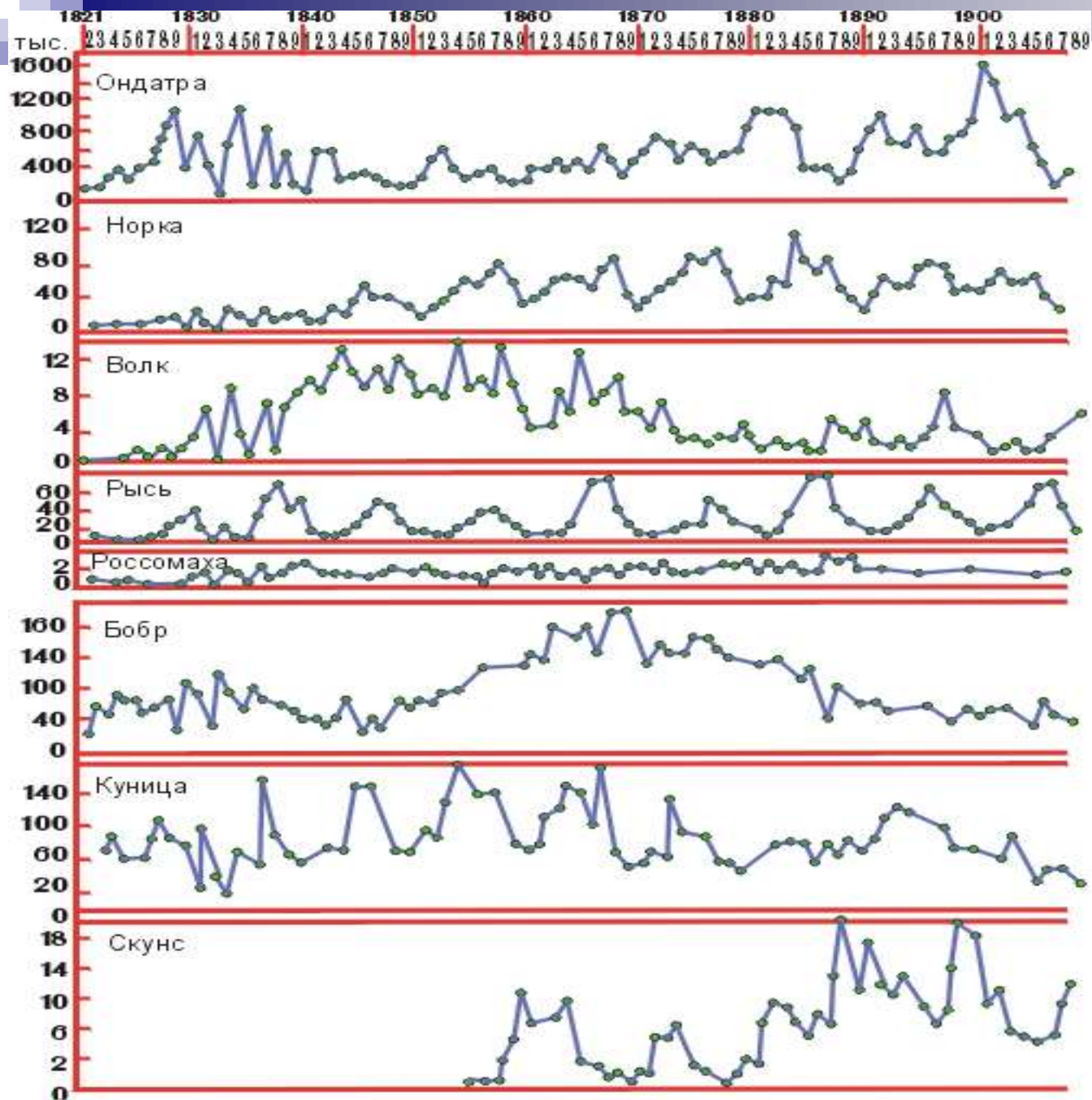
Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода





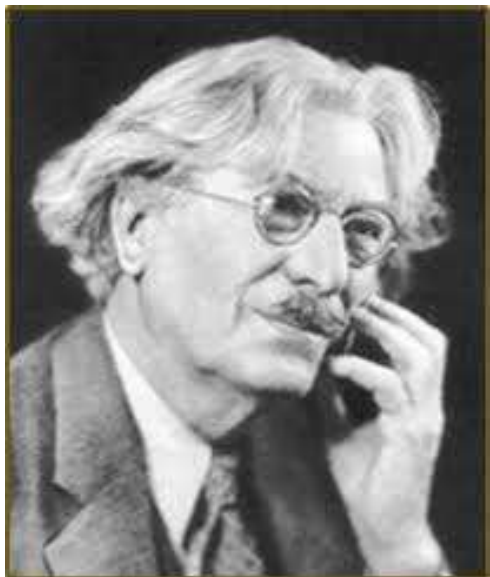
Если функция $F(N)$ имеет один экстремум и точку перегиба на падающей части, то чем больше амплитуда вспышки, тем длительнее интервал малых численностей популяции

Vandermeer, 1982



Ernest Thompson Seton
1860-1946

Кинетические кривые
численности пушных зверей по
данным компании Гудзонова
залива.
(Сетон-Томсон, Торонто, 1911)



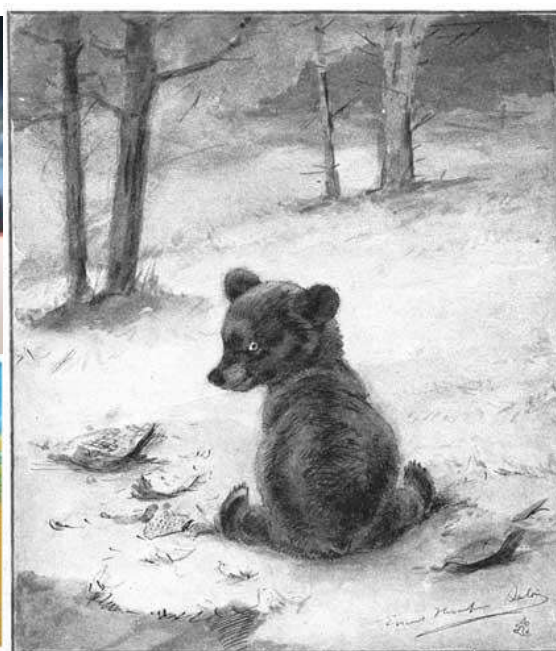
Эрнест Сетон Томсон (1860-1946)

Канадский и американский писатель, художник-анималист, естествоиспытатель и общественный деятель британского происхождения. Один из основателей [движения скаутов](#) в США.

Разработал воспитательную систему «Пионеринг», связанную с играми и жизнью на природе. (в честь знаменитого романа Фенимора Купера «[Пионеры](#)»,



Маленькие дикари, Рассказы о животных, Домино *James Fenimore Cooper; 1789-1851*



Романы:
Пионеры
Следопыт
Зверобой
Последний
из могижан

