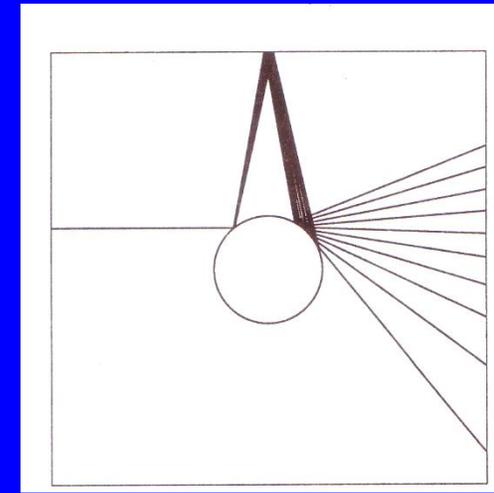


Г.Ю Ризниченко



Динамический хаос

Фото Роберта Гендлера.
Созвездие стрельца

- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности).
- Все рождается из Хаоса (древнегреческое)
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена



Динамический хаос. Основные ПОНЯТИЯ

- *Основные понятия теории динамических систем.*
-
- *Предельные множества. Аттракторы.*
-
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов. Фракталы*

χαος

CHAOS

Александр
Юрьевич
Лоскутов
1960-2011

Профессор
физфака
МГУ

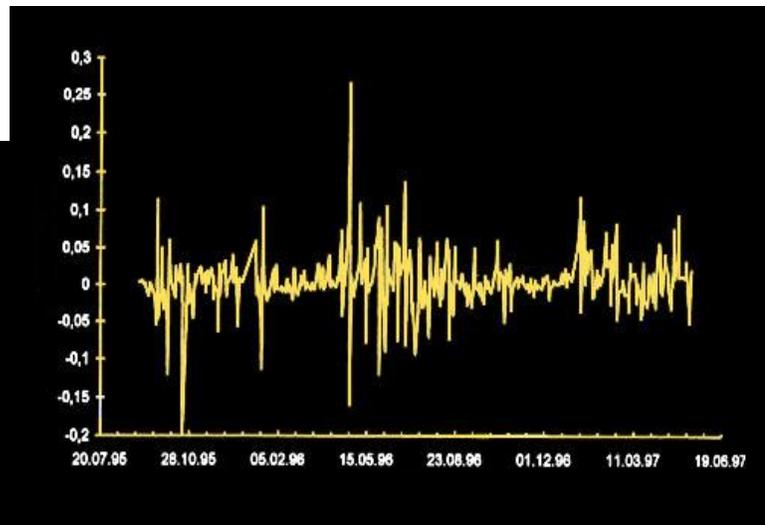
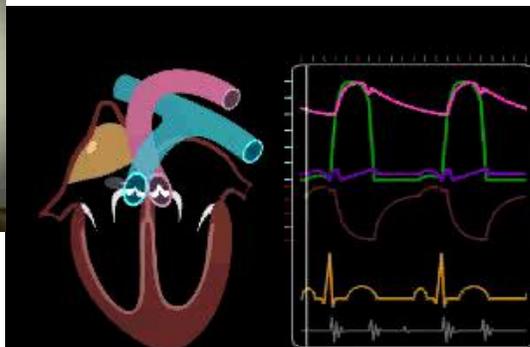


Weather

Chemical
Kinetics

Heart rhythm

Биржевые
индексы



BZ-reaction

Белоусов и
Жаботинский



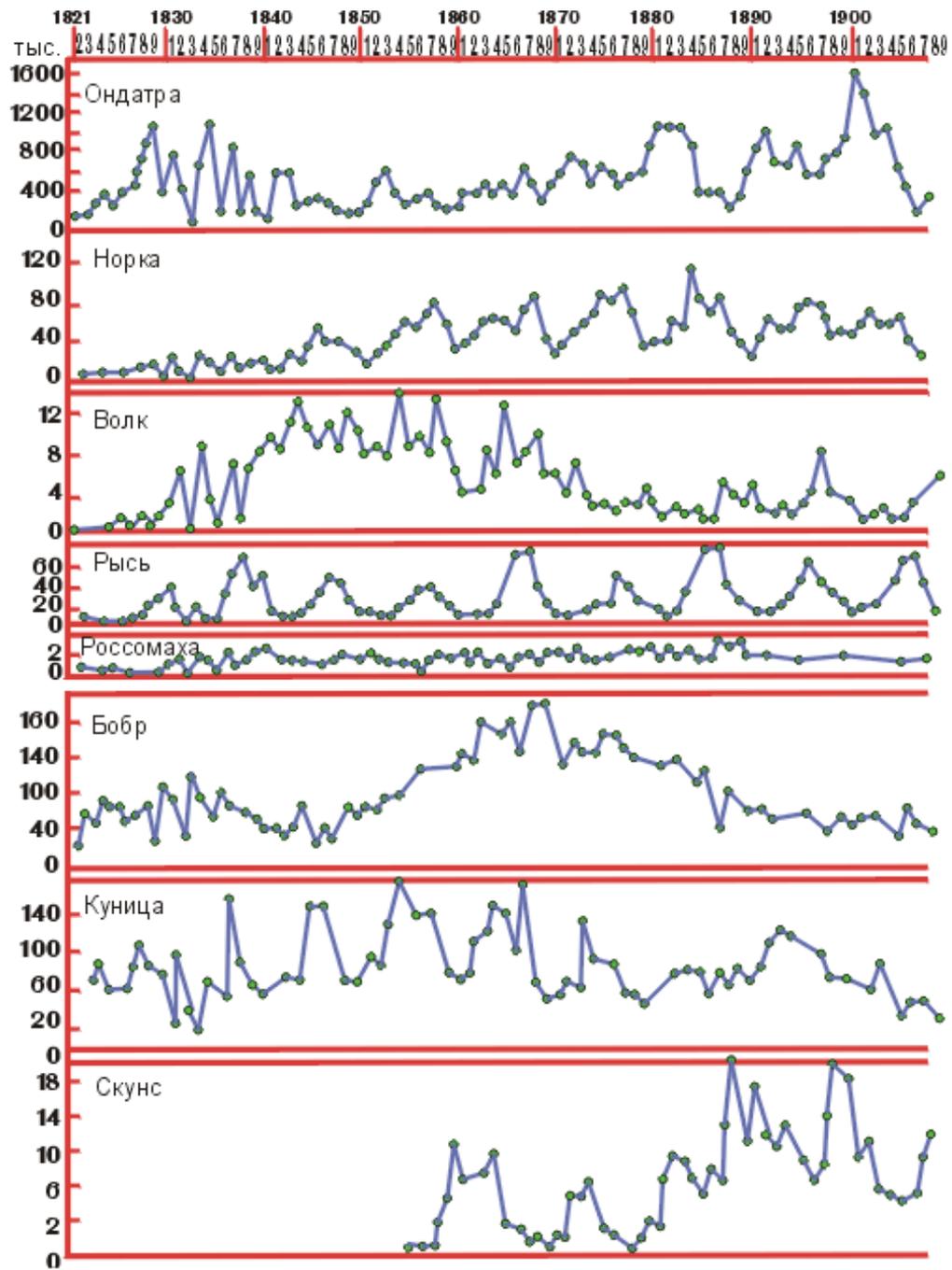
Индекс S&P 500, график от Financial Times



Nov 08

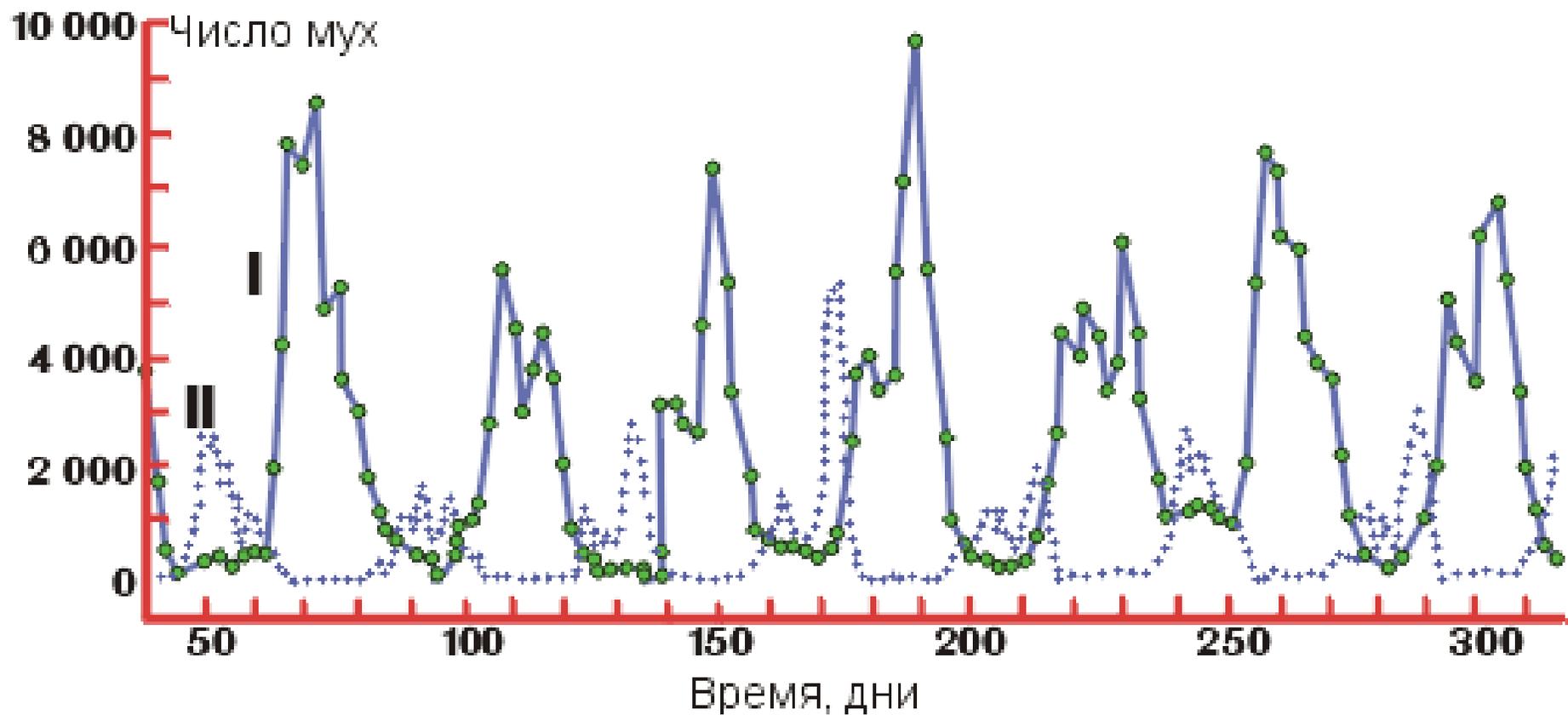
Индекс Dow Jones Industrials (июнь 1929 – май 1933)





Данные по
заготовкам
пушнины
компании
Гудзонова
Залива

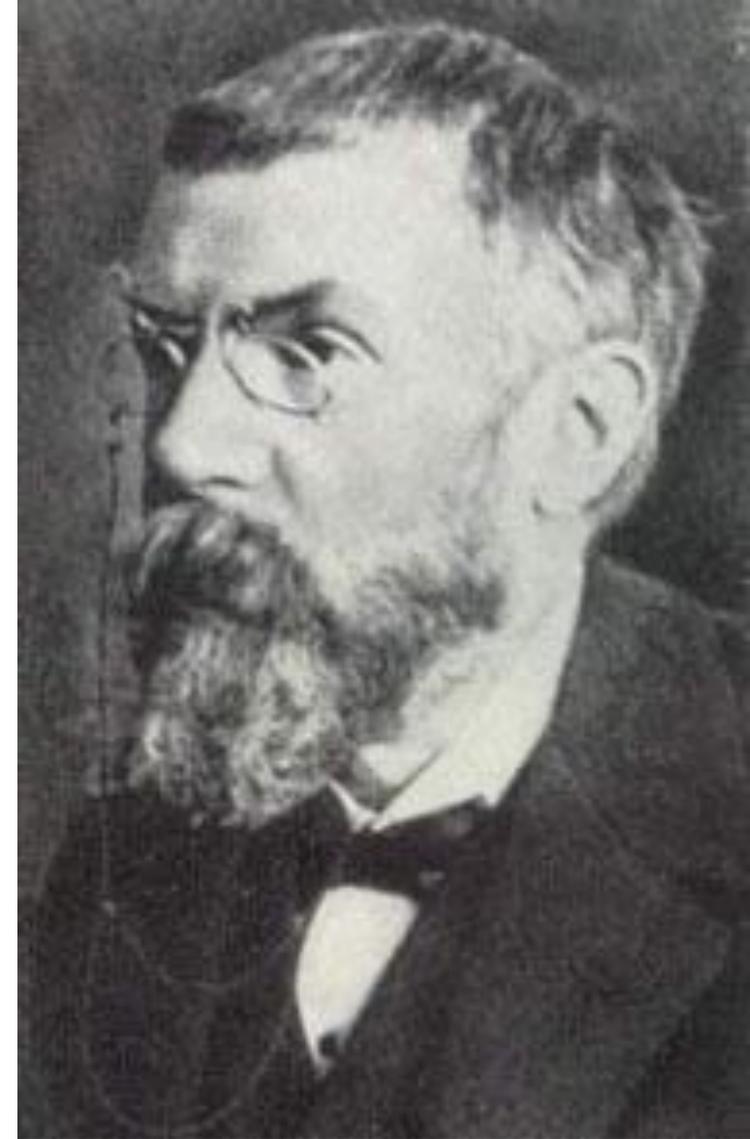
Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре –

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».



Jules Henri Poincaré
1854-1912

Лоренц

Lorenz EN (1963)

Deterministic non-periodic
flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - x,$$

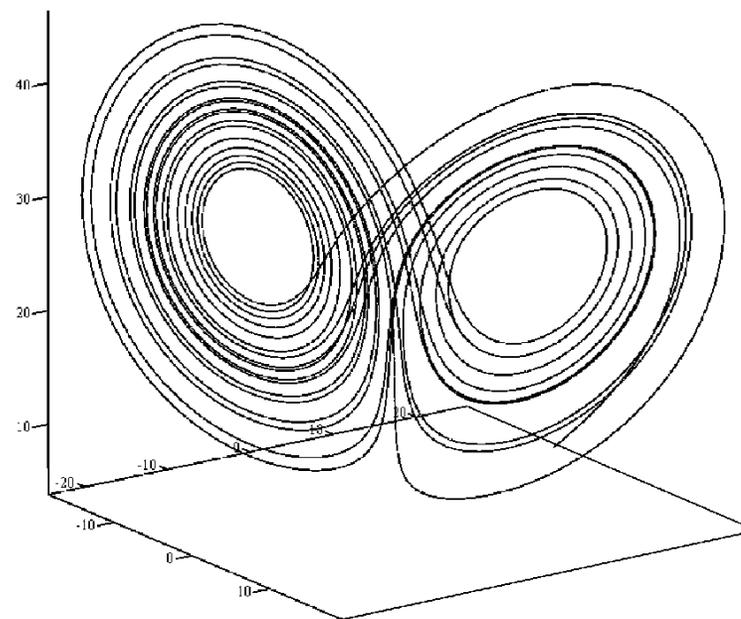
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10,$$

$$b=8/3$$

Хаотические траектории в
системе Лоренца

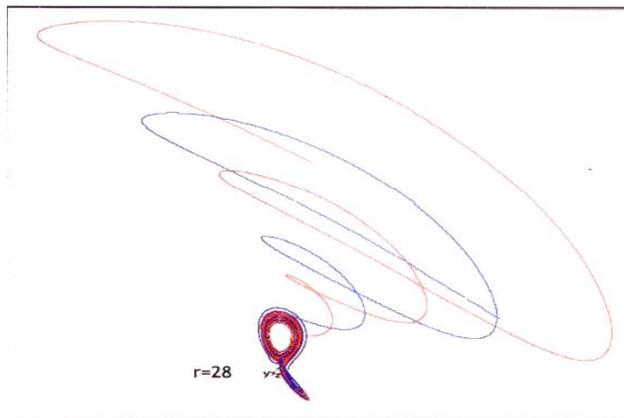
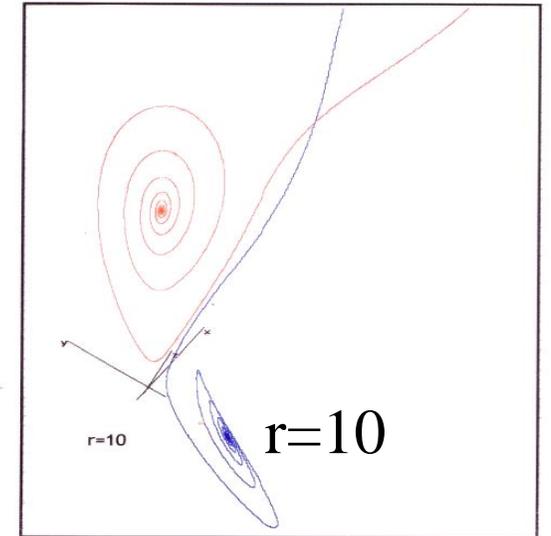
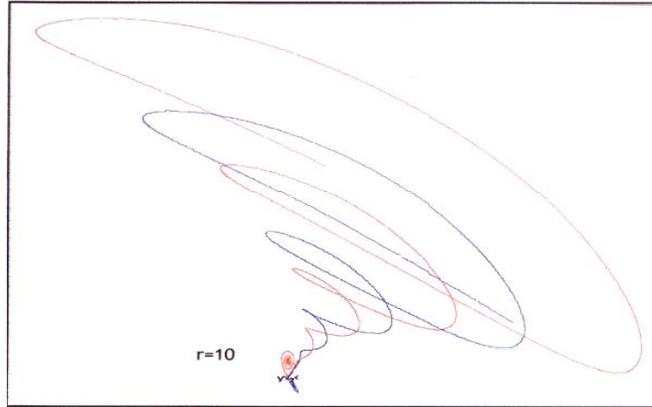
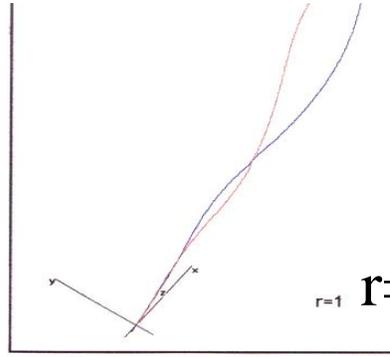


- **Одномодовый лазер.** x — амплитуда волн в резонаторе лазера,
- y — поляризация, z — инверсия населённых энергетических уровней,
- b и σ — отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, r — интенсивность накачки.

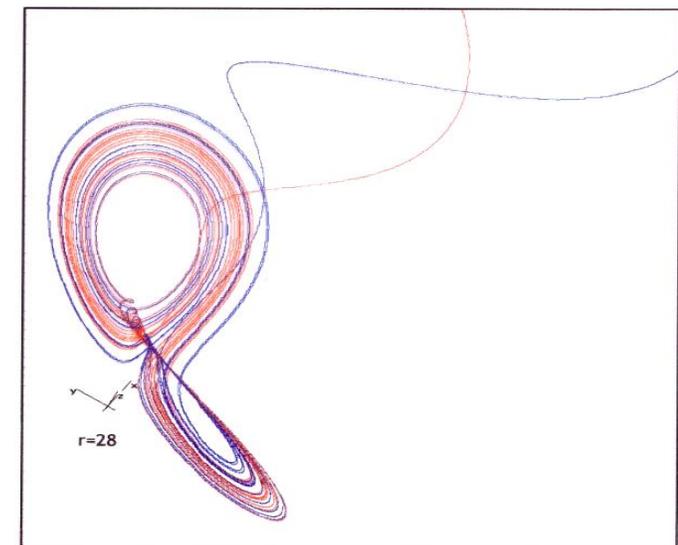
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Траектории
системы Лоренца
при разных
значениях
параметра r

Игорь Федик
каф. биофизики



$r=28$



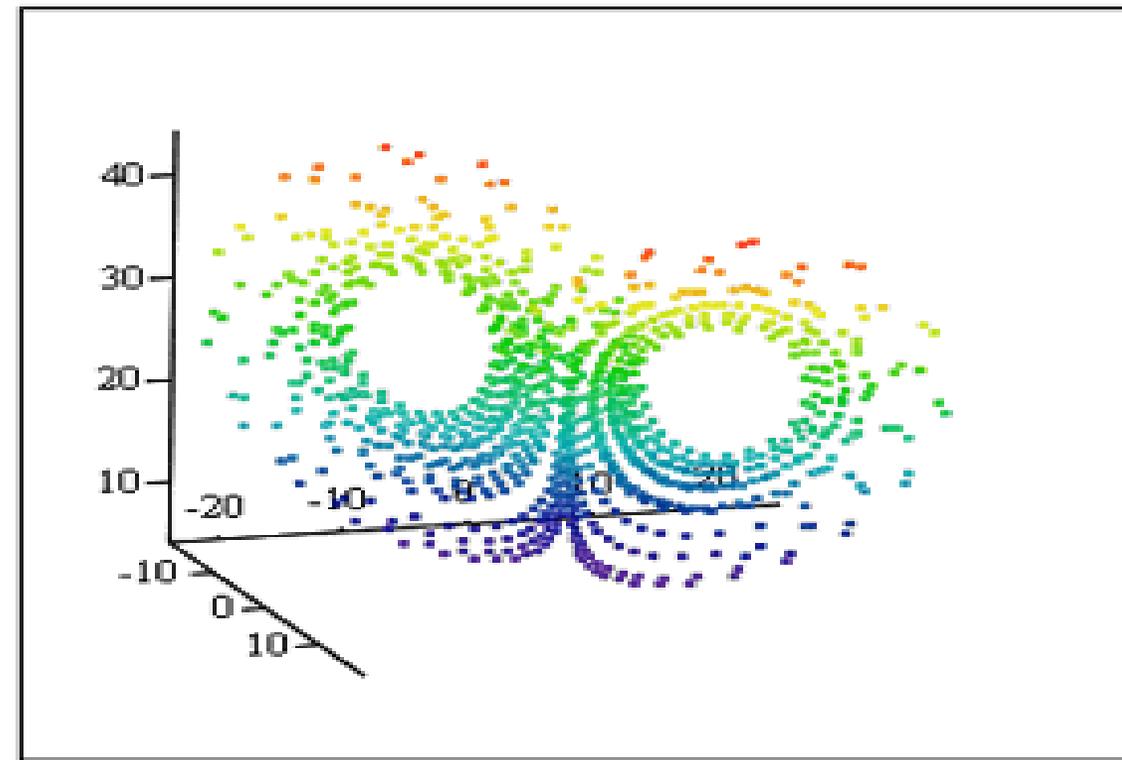
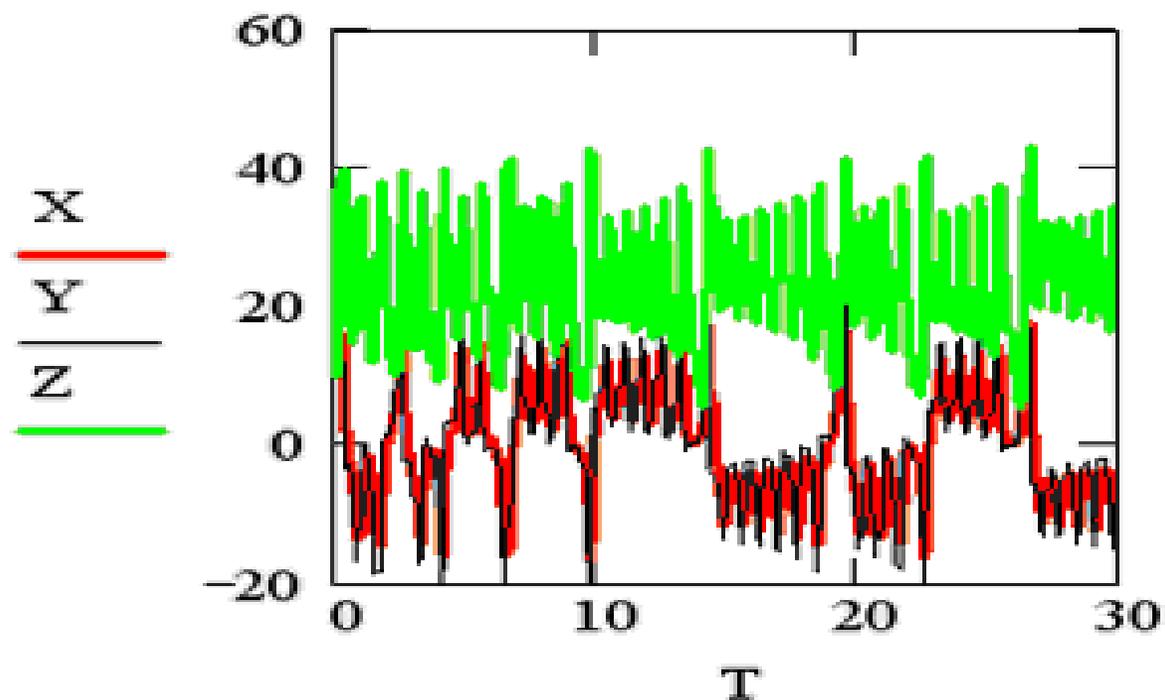
Поведение переменных во времени (кинетика переменных)

$$T := D^{(0)}$$

$$X := D^{(1)}$$

$$Y := D^{(2)}$$

$$Z := D^{(3)}$$



(X, Y, Z)



Система
Лоренца 1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

$$r=28, s=10, b=8/3$$

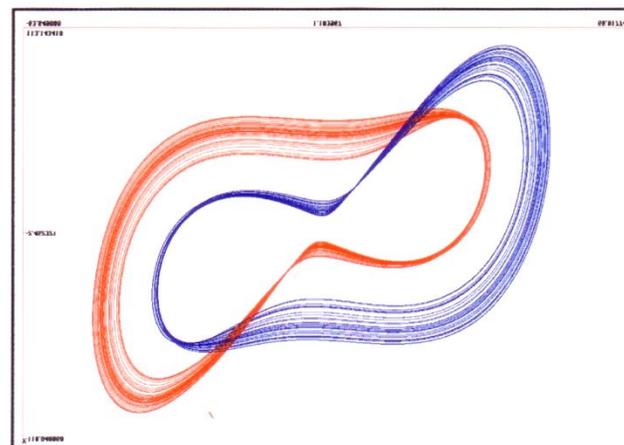
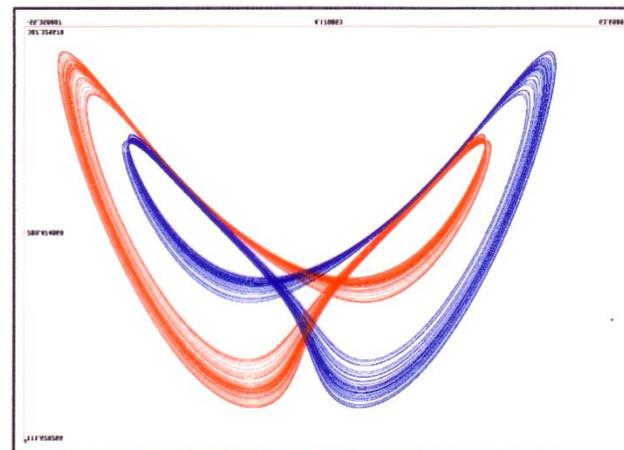
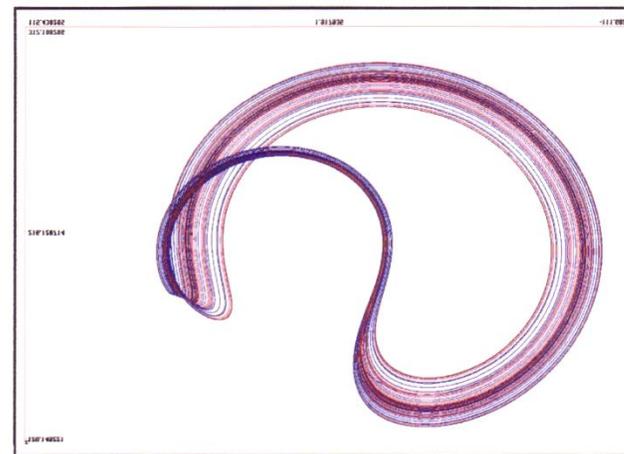
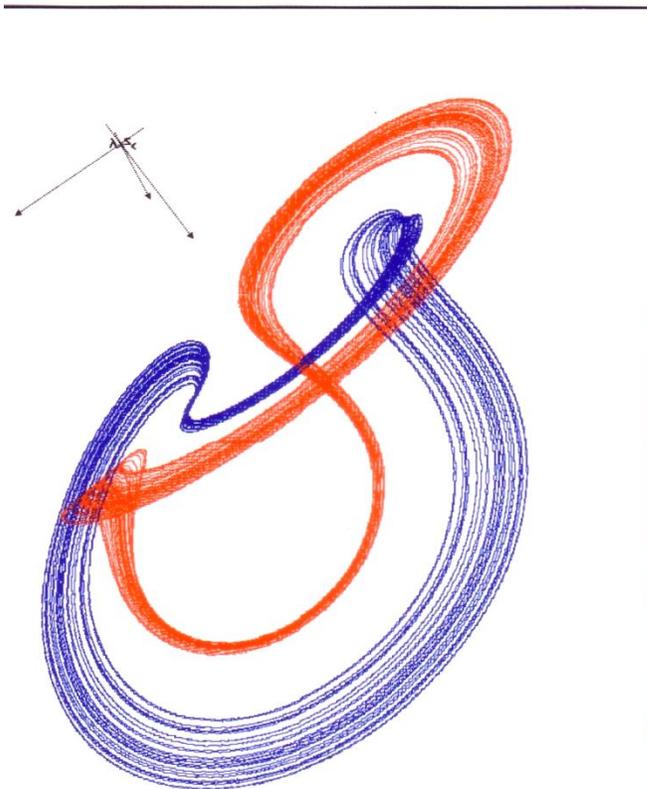
Edward Norton

Lorenz

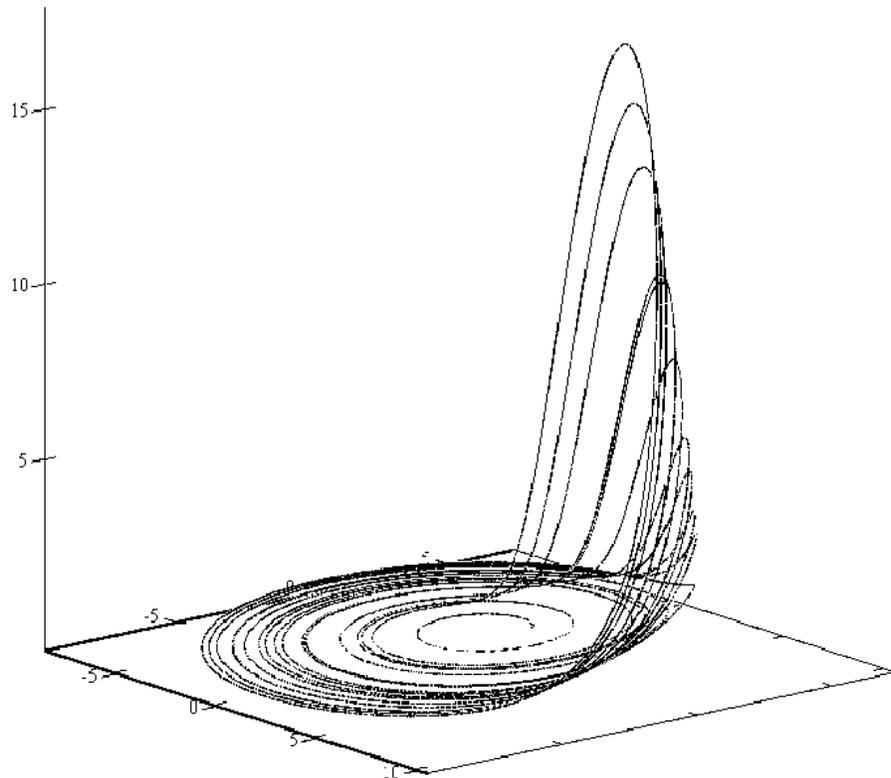
1917-2008

Американский математик и
метеоролог

Один из основателей теории
хаоса



Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



$$\dot{x} = -(x + y),$$

$$\dot{y} = x + \alpha y,$$

$$\dot{z} = \alpha + z(x - \mu).$$

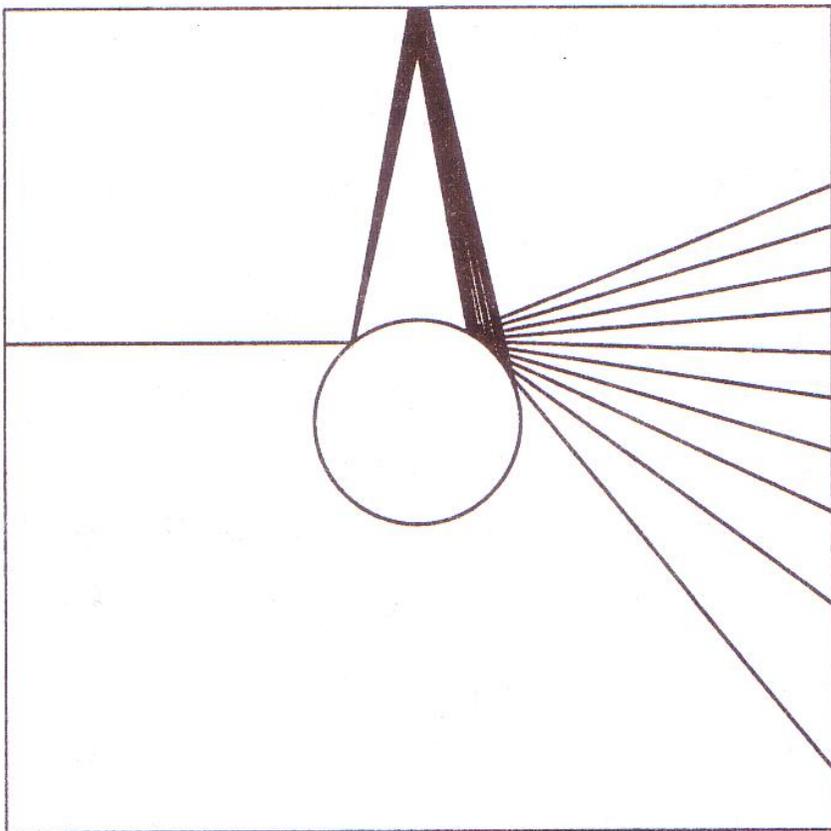
Хаотическое поведение возникает

- не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца)
- не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца)
- не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Разбегание траекторий

Потребность в определенности –
естественная биологическая
потребность человека,
но она же – порок мышления



Из книги «Черный лебедь»

Нассим
Николас
Талеб

Черный лебедь



Под знаком непредсказуемости

Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

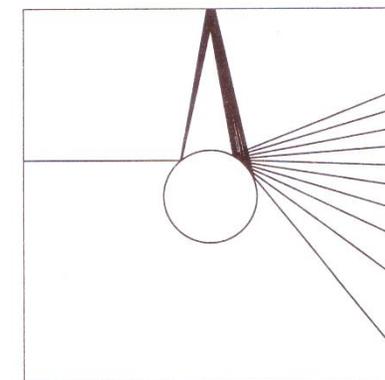
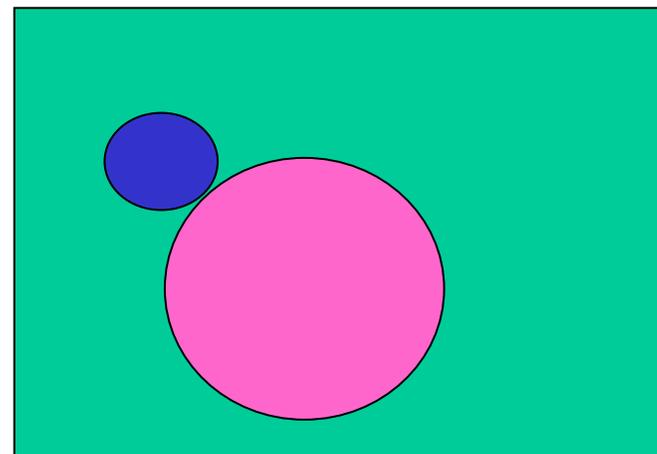
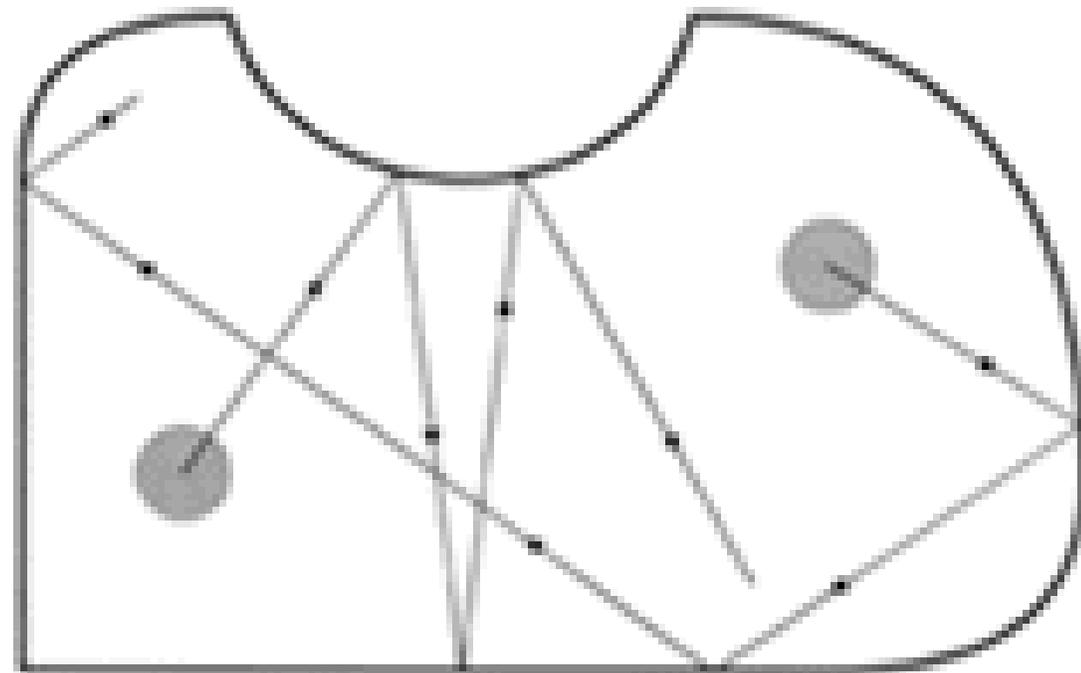


Яков
Григорьевич
Синай

Биллиард Синая

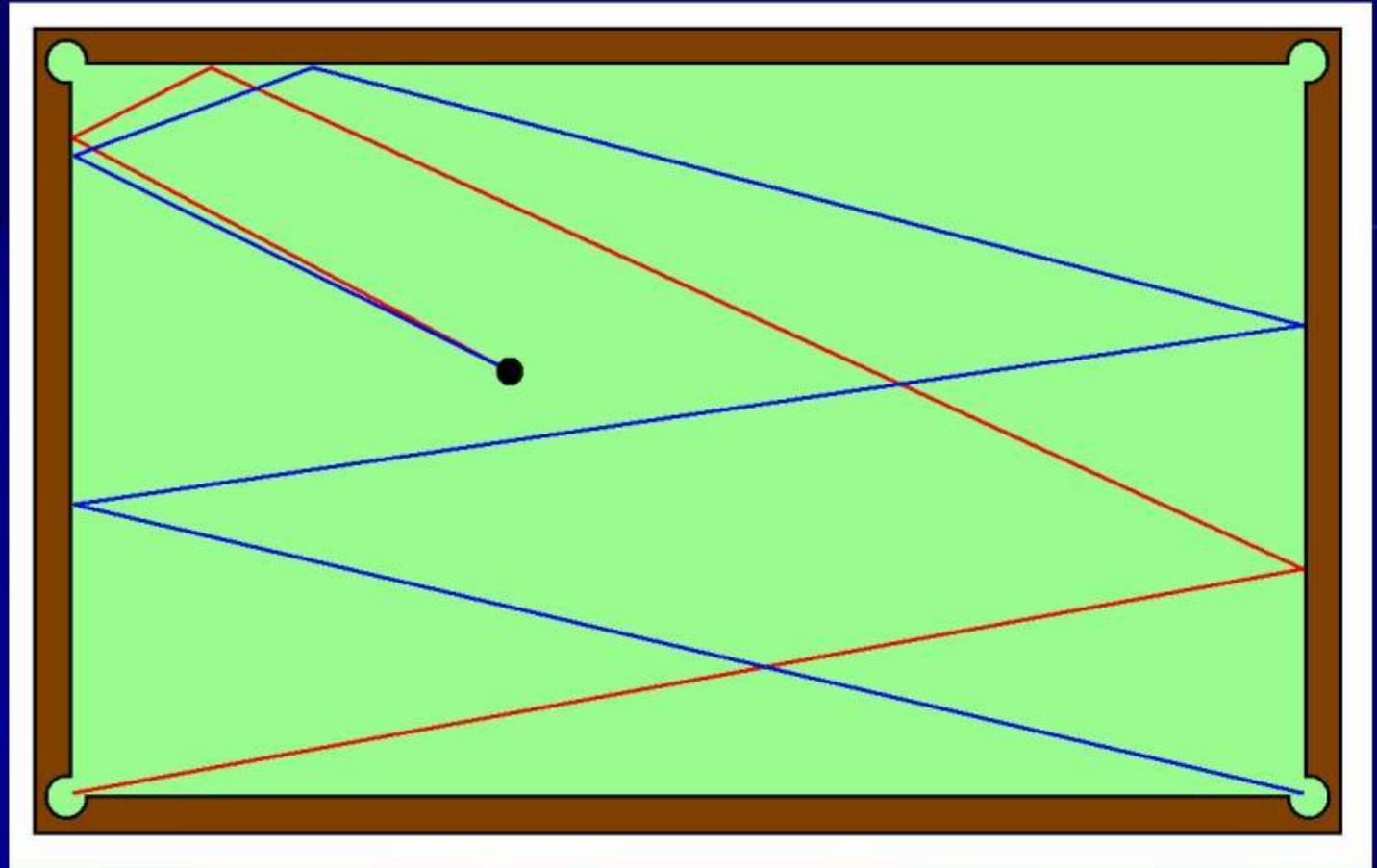
Лауреат Абелевской
премии март 2014 г.

Профессор Мехмата
МГУ.
Работы по теории
динамических систем,
статистической физике



Угол падения равен
углу отражения

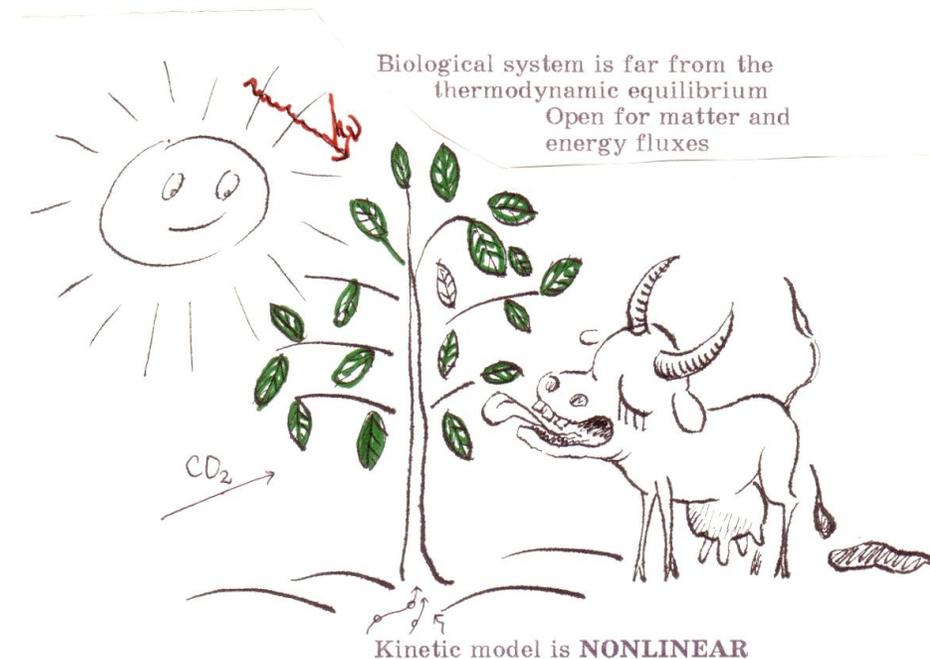
БИЛЛИАРД С прямо- угольными стенками



НЕЛИНЕЙНОСТЬ

является необходимым (но не достаточным)
условием существования динамического
(детерминированного) хаоса

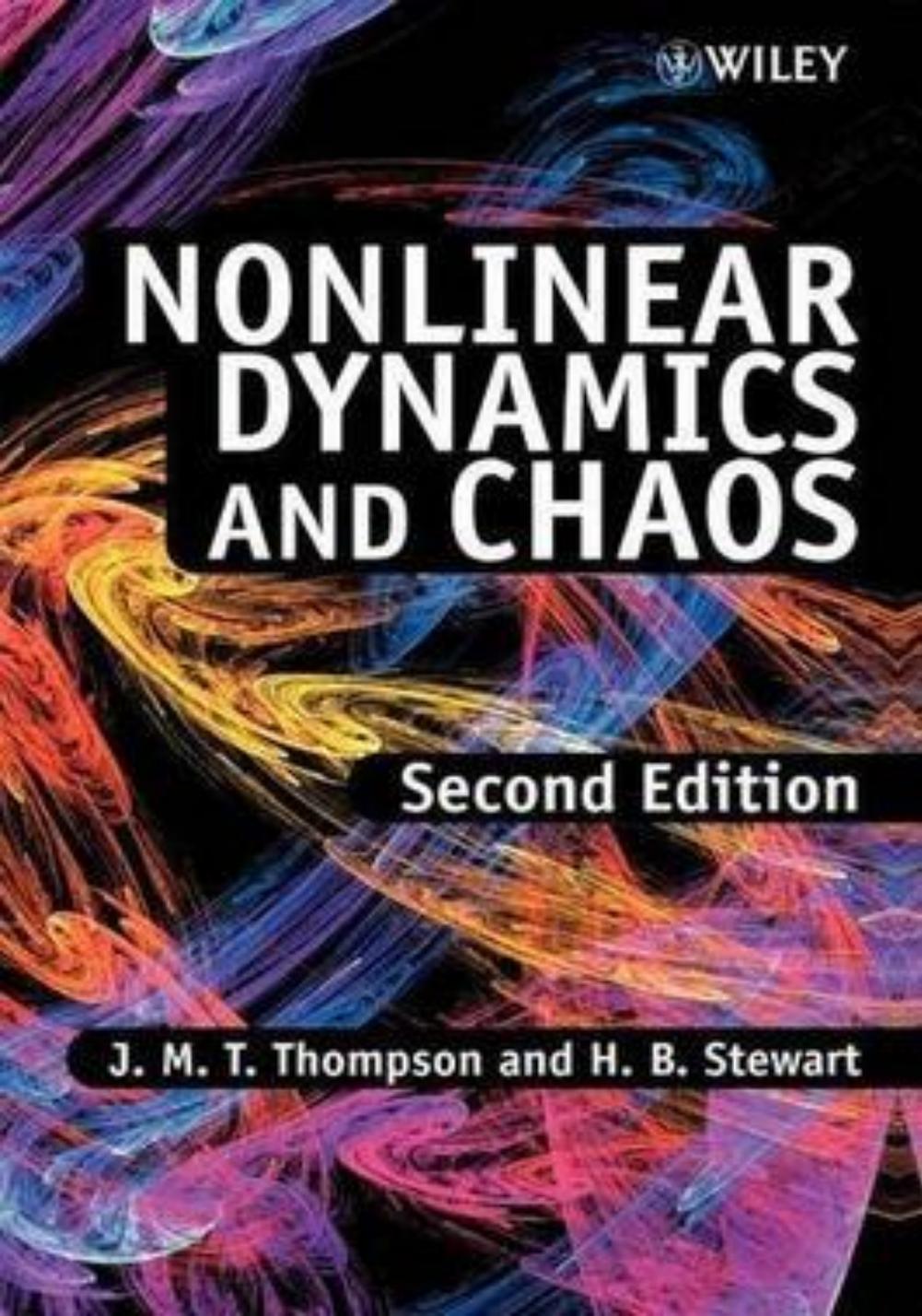
Линейные
дифференциальные и
разностные уравнения не
приводят к хаосу.



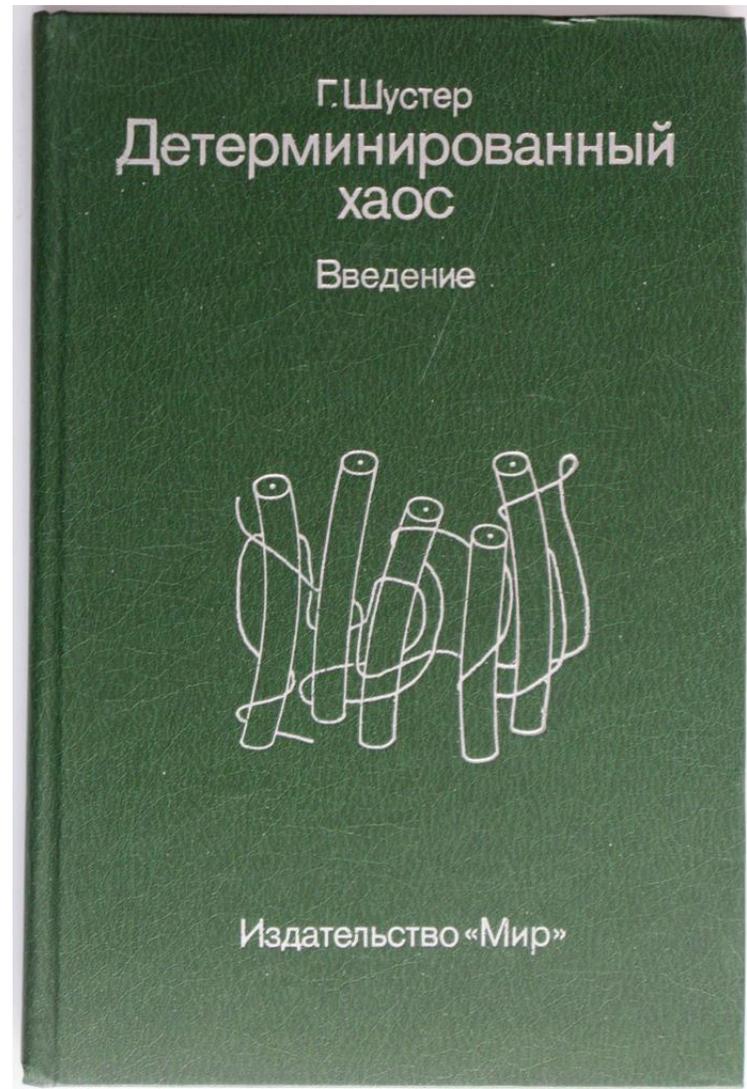
*Only in **NONLINEAR SYSTEM***

SELFORGANIZATION IN TIME:

1. selfoscillation
2. multistability
3. quasystochastic regimes in deterministic systems



Книги



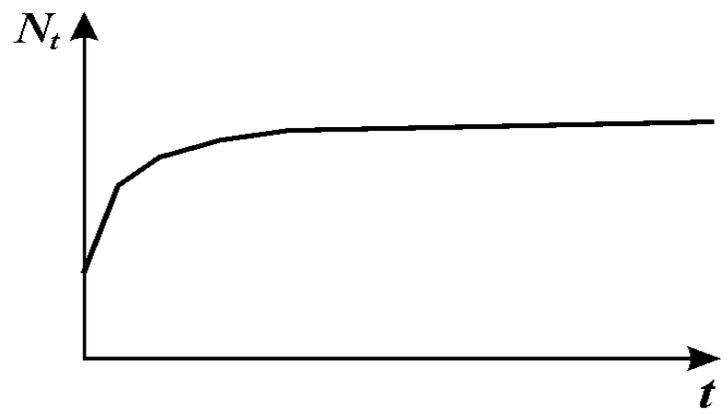
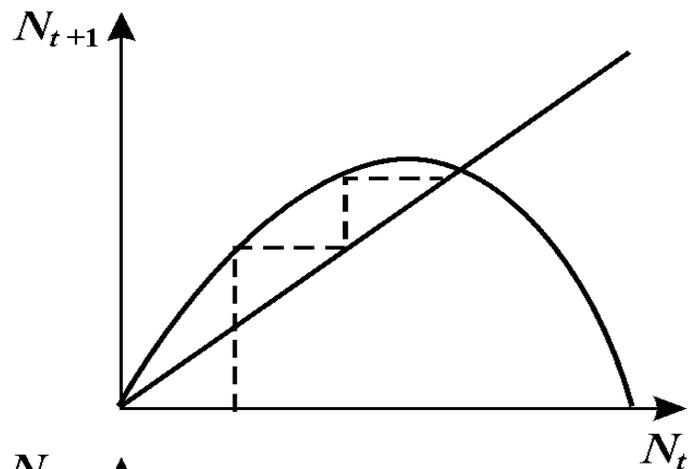
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

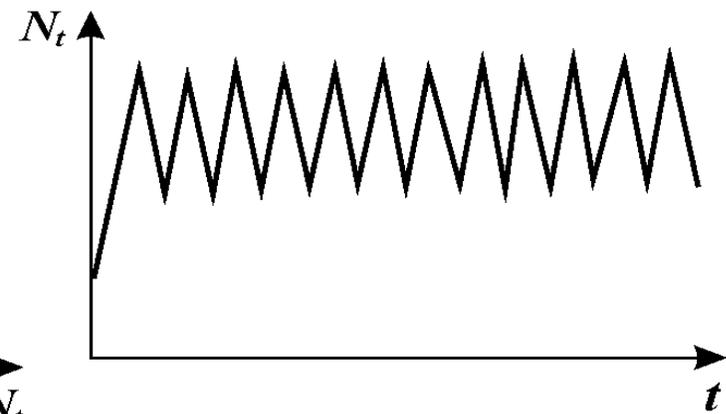
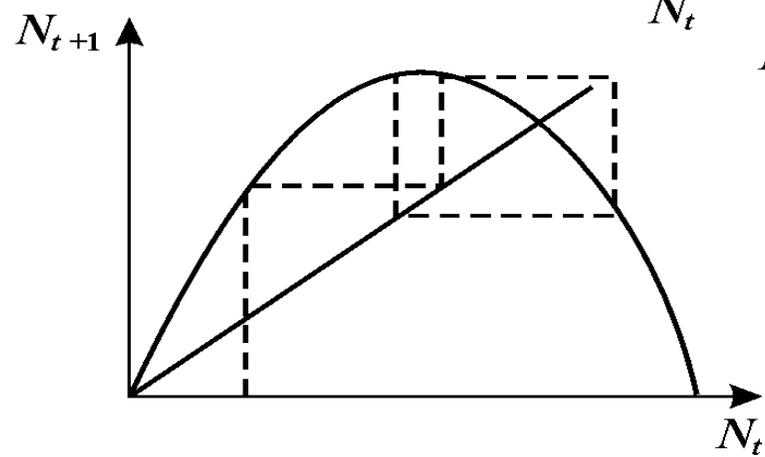
Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.



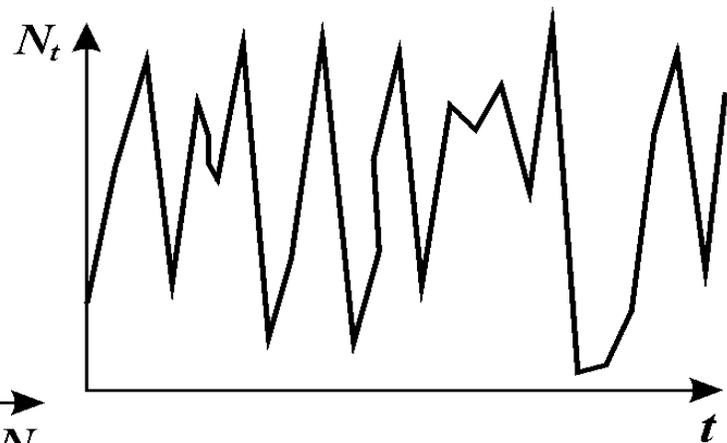
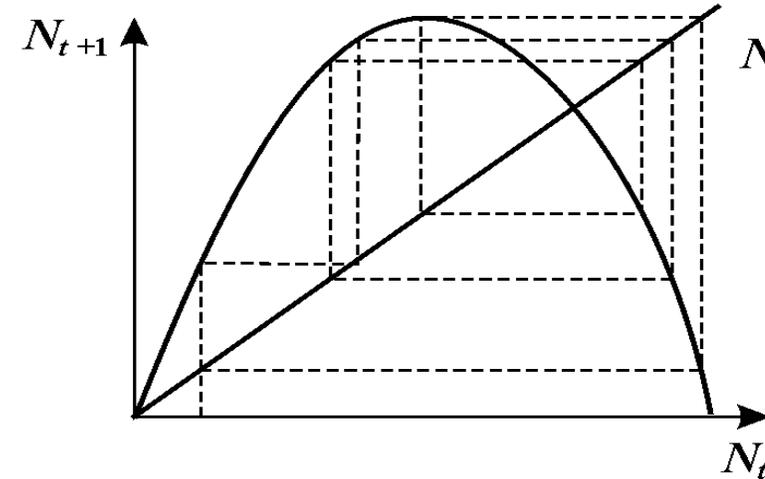
a

Квадратичное
отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$



б

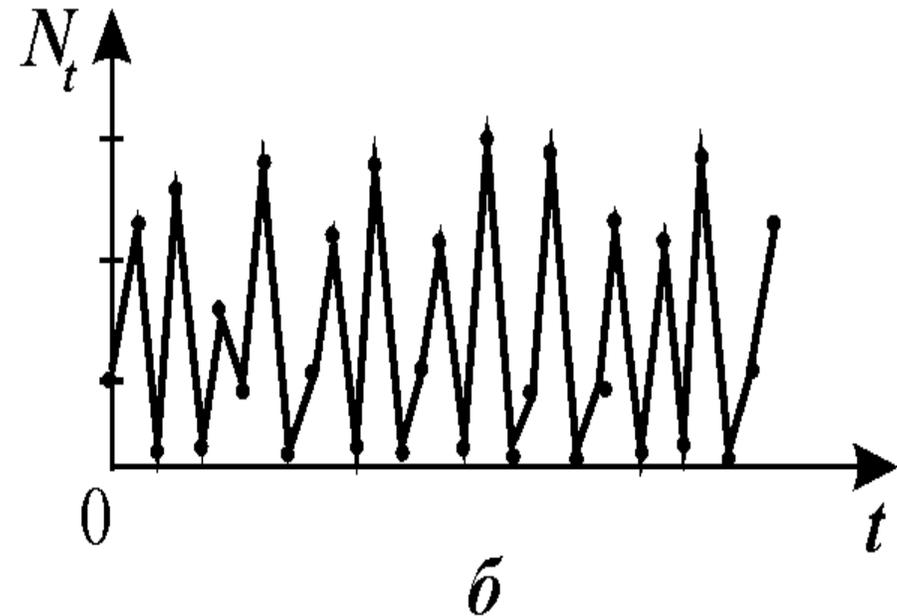
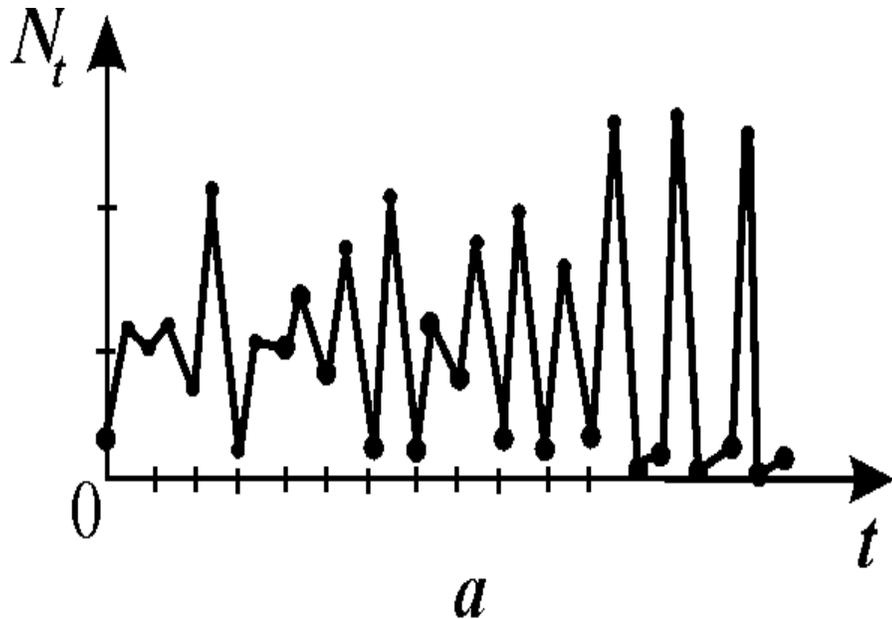


в

Пример
детерминированного
хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

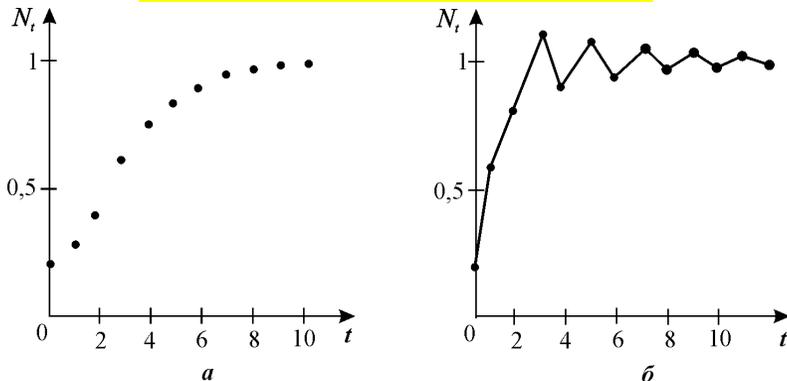
Дискретный аналог
логистического уравнения



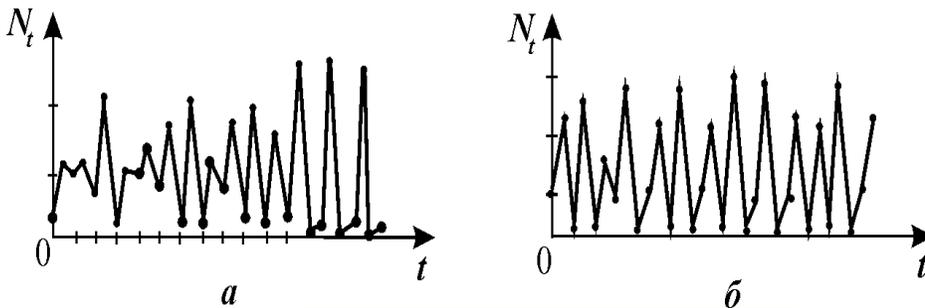
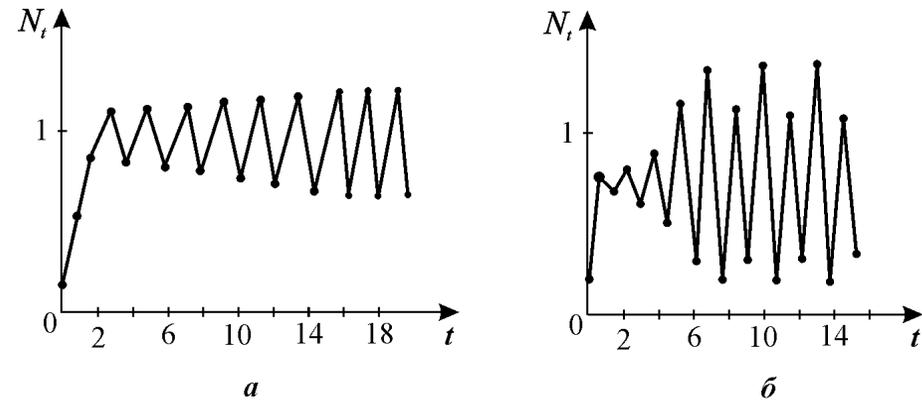
При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
 решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет собой затухающие колебания при $1 < r < 2$
 при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы;
 при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$
 при $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий. Существуют трехточечные циклы и квазистохастические решения

Устойчивое решение



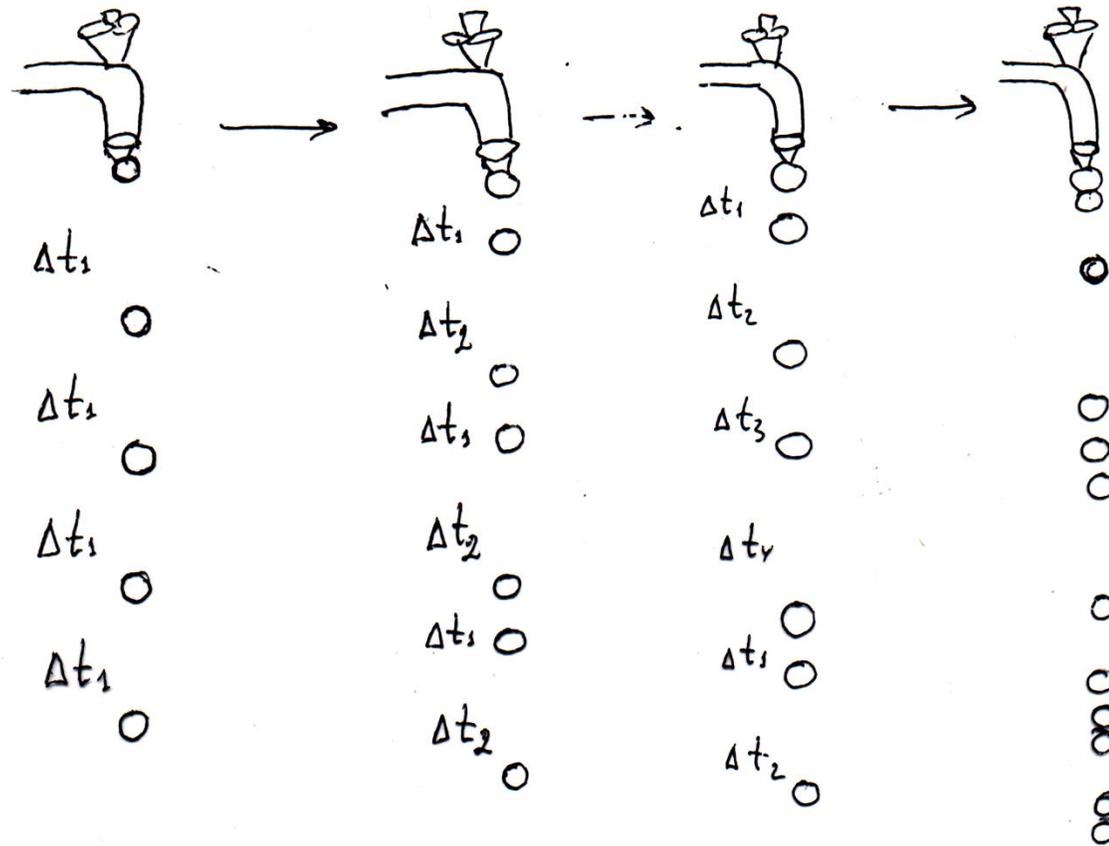
Циклы длины $2k$



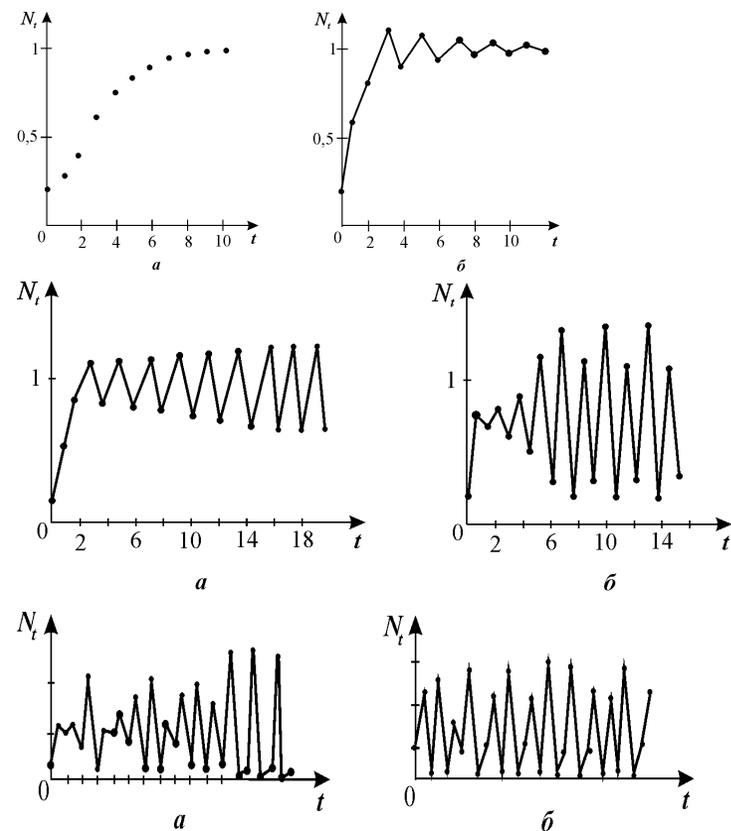
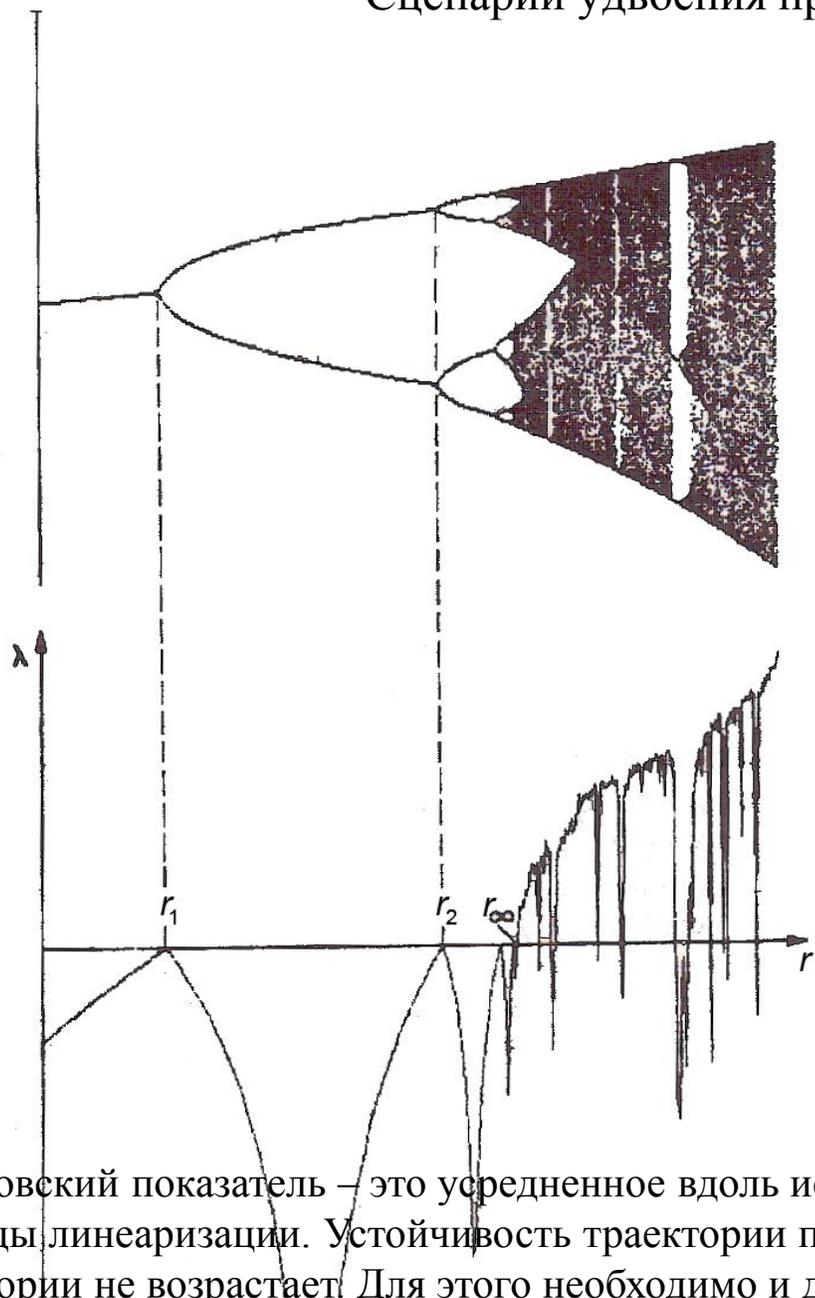
Динамический хаос

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

Переход к хаосу через удвоение периода



Сценарий удвоения предельного цикла



Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|.$$

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения ρ_i матрицы линеаризации. Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $y(t^*)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей λ_i не содержал положительных показателей.

Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

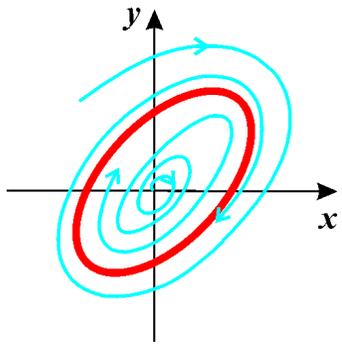
Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает.

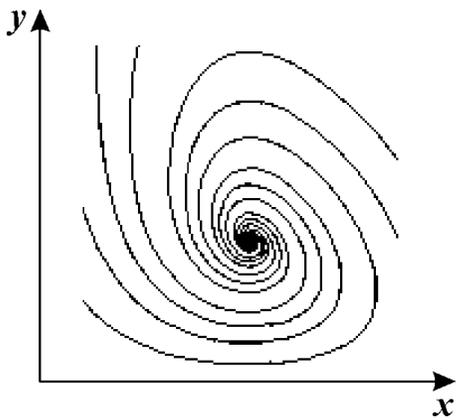
Т.е. движение *устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого движения $\mathbf{x}(t)$, для которого $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство: $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$.

Знак $\|\ \|\$ означает норму (длину) вектора.

Устойчивость по Пуассону

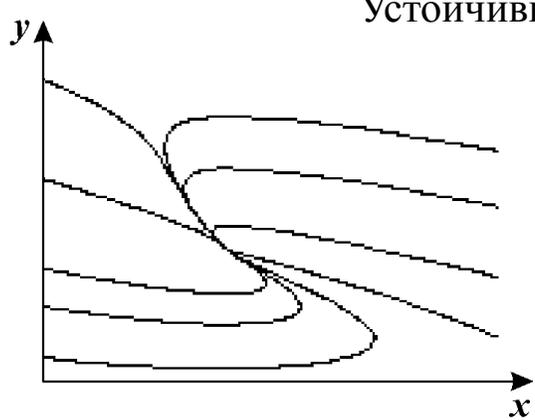
- предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки.
- Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.





а

Устойчивый
фокус

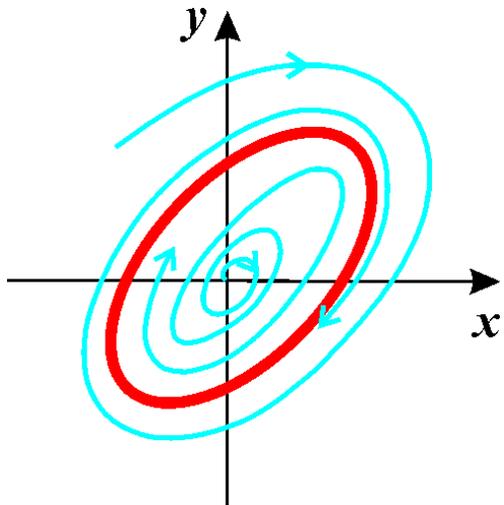


б

Устойчивый узел

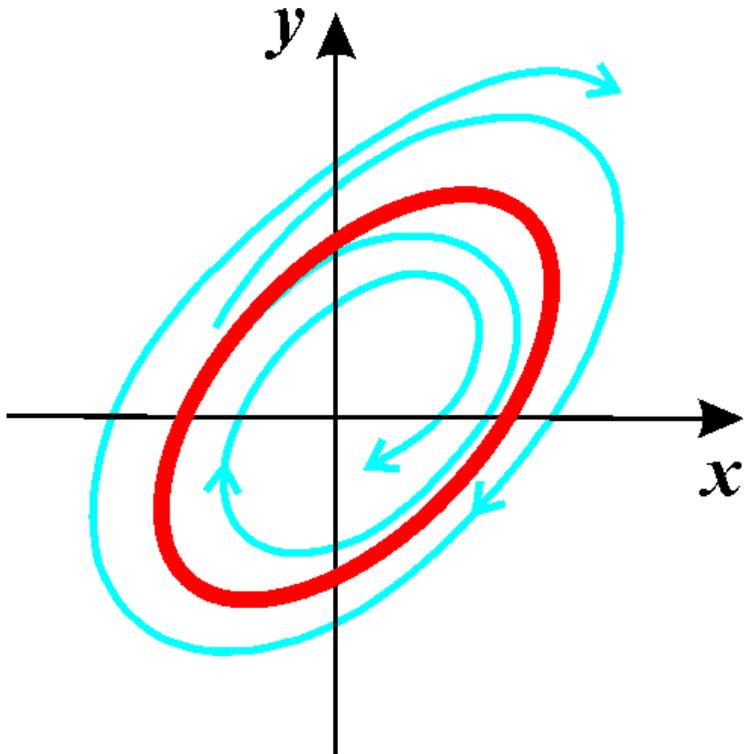
Аттрактор.

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow +\infty$, то L – *притягивающее предельное множество, или аттрактор*. Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).



Устойчивый
предельный цикл

Репеллер



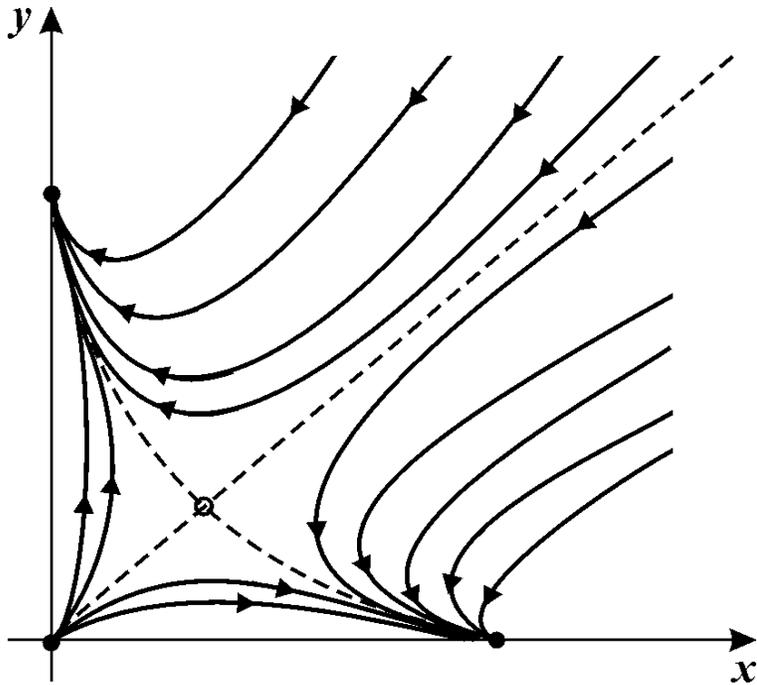
Неустойчивый
предельный цикл

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow -\infty$, то L – отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.

Неустойчивый узел,

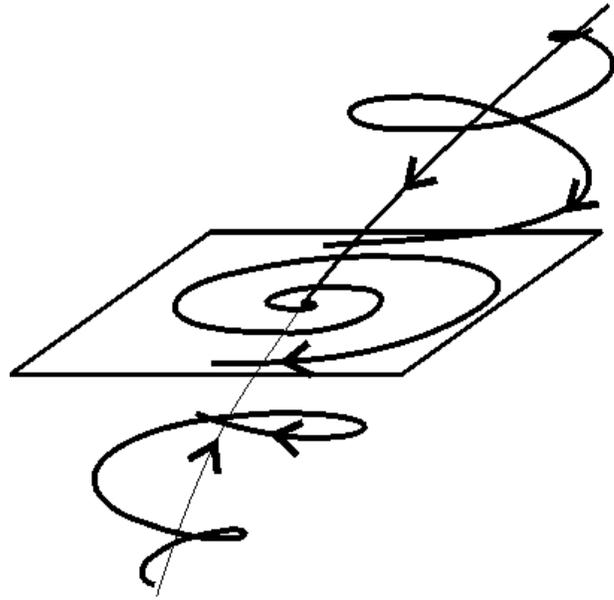
Неустойчивый фокус

Седловое множество

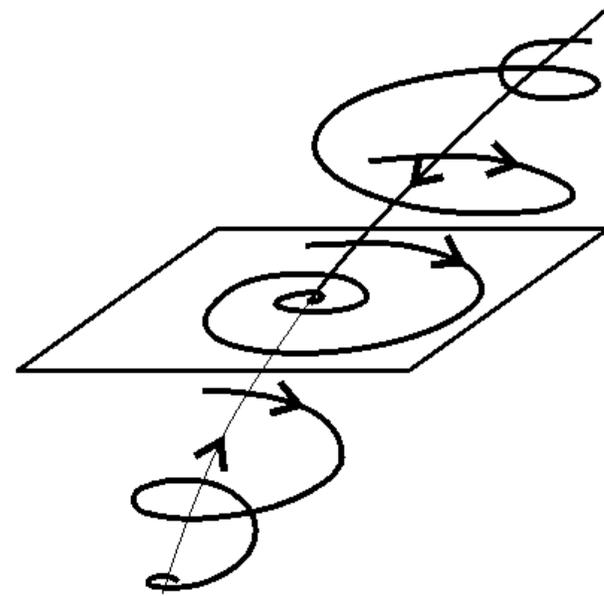


- Если множество V состоит из двух подмножеств $V = W^s \cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u , стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством (или седлом)*. Множества W^s и W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.

Седло-фокусы



a



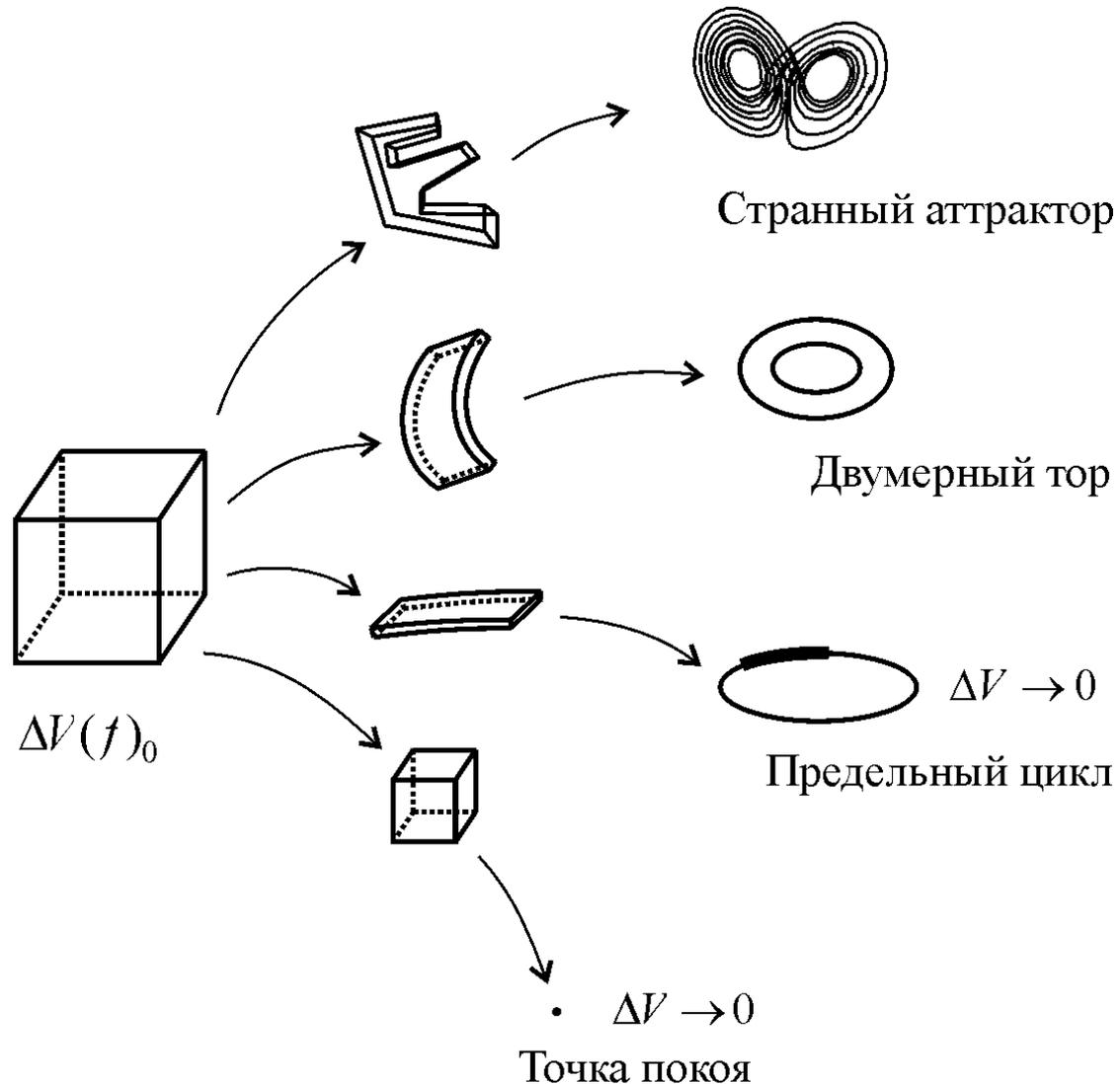
б

Седло-фокусы в пространстве $N = 3$.

a) p_1 – действительно и отрицательно, $p_{2,3}$ – комплексно сопряженные, $Re p_{2,3} > 0$;

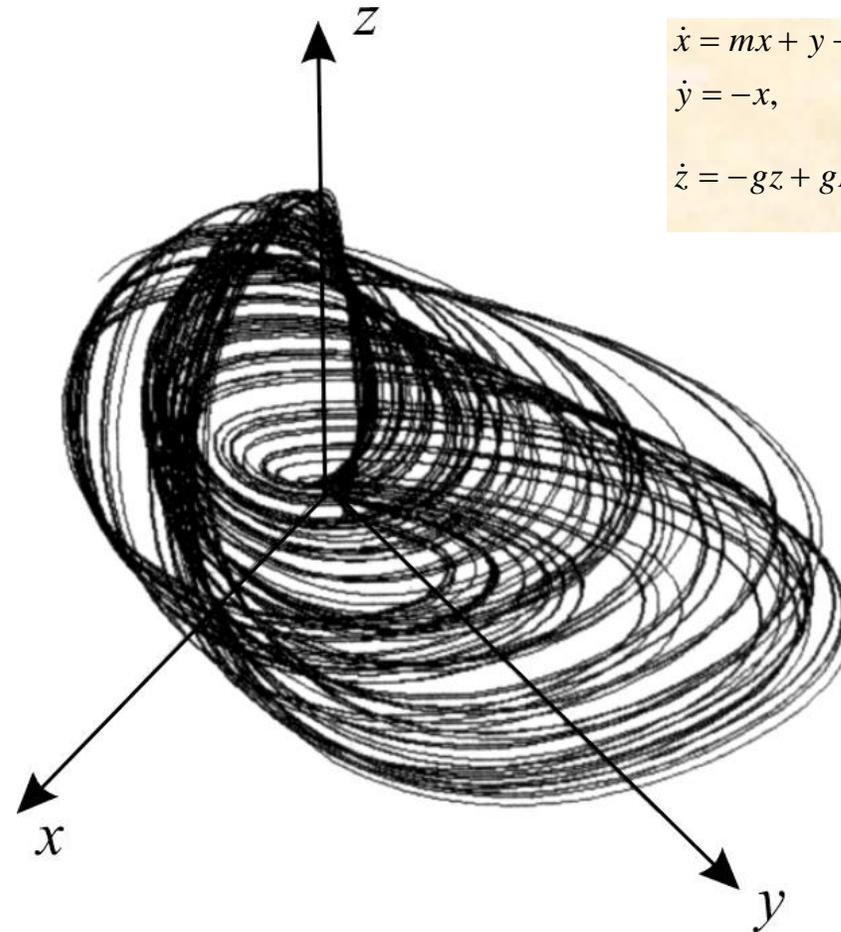
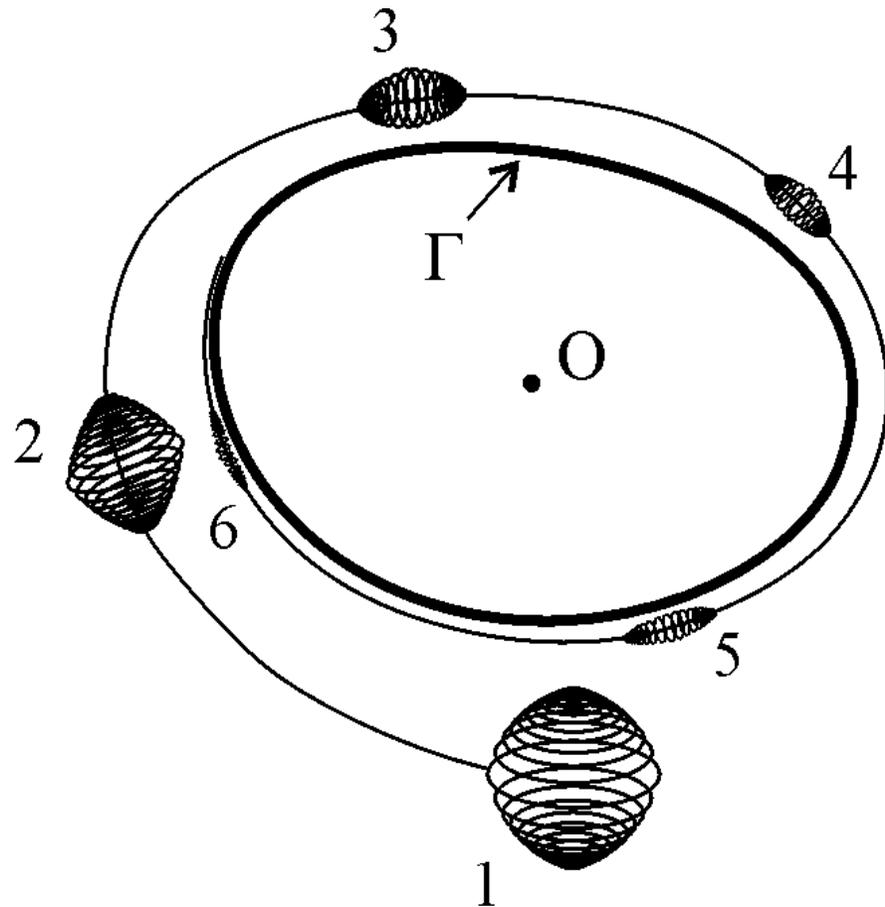
б) p_1 – действительно и положительно, $p_{2,3}$ – комплексно сопряженные, $Re p_{2,3} < 0$

Диссипативные системы



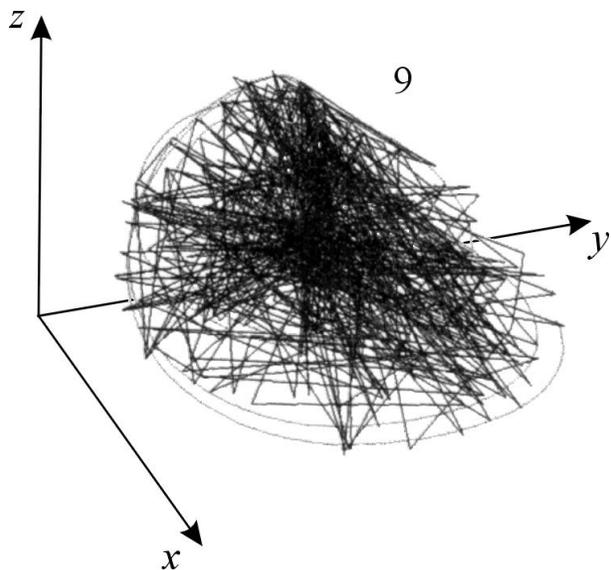
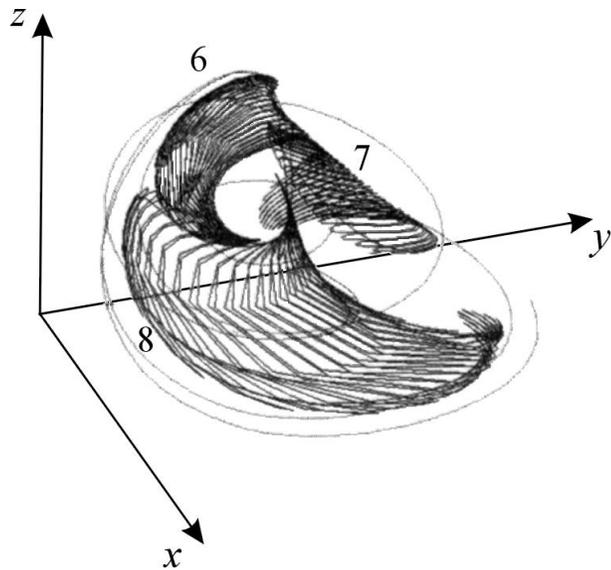
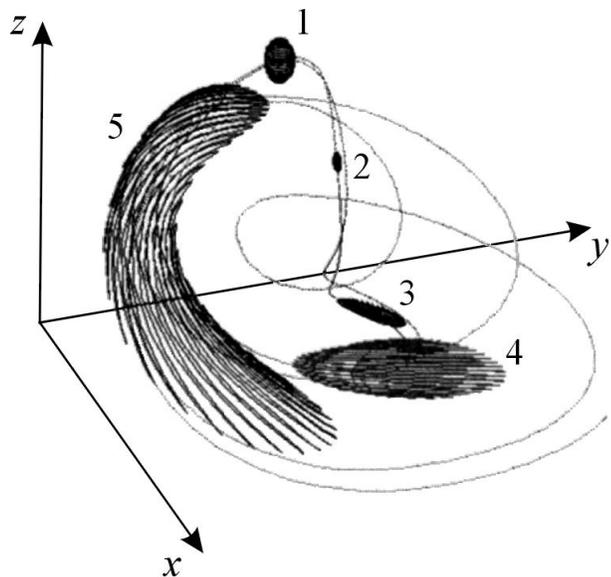
Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε
 при «наматывании» траектории на устойчивый
 предельный цикл -траектория Γ .



$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Детерминированный хаос в трехмерной системе Фазовая траектория для значений параметров $m=1,5$, $g=0,2$. (Анищенко и др, 1999)



Эволюция малого
первоначального
фазового объема во
времени в
динамической
системе
(Анищенко и др.,
1999).

$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

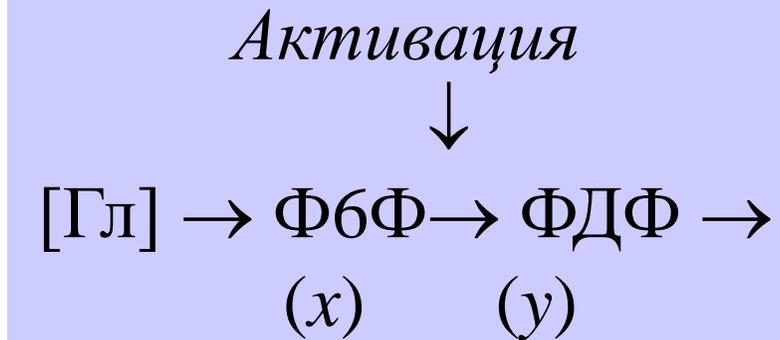
Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием

Безразмерные уравнения гликолиза

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy, \quad \text{Ф6Ф}$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right), \quad \text{ФДФ}$$



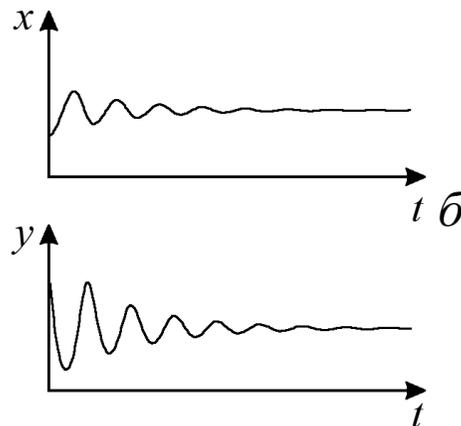
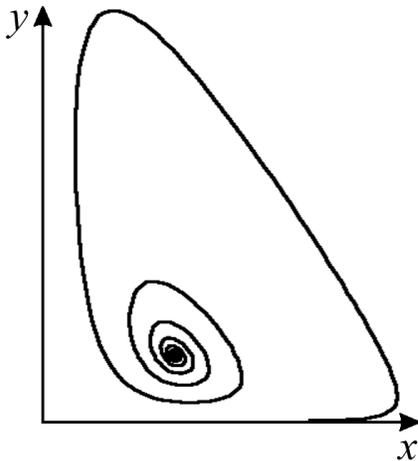
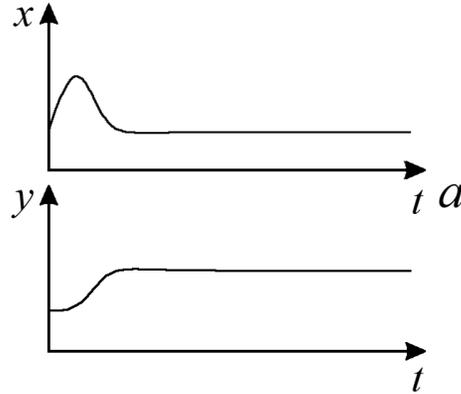
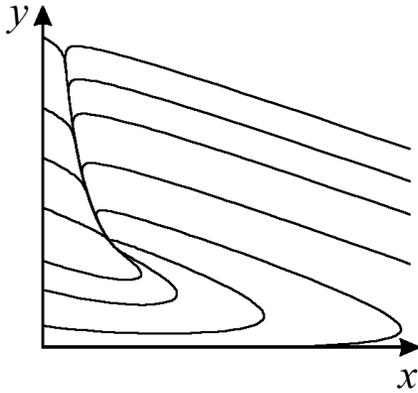
$$\alpha = \frac{(q-k)^2 K_{mz} K_{my}}{(K'_{my})^2 k \chi}, \quad r = \frac{k}{q+k}.$$

Фазовые портреты и кинетика

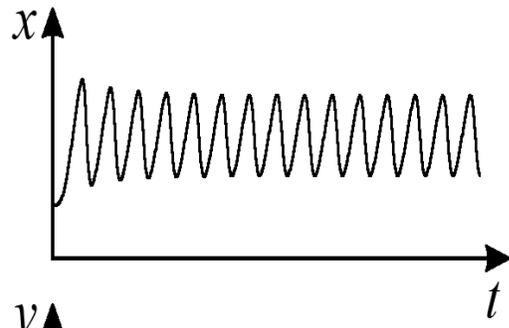
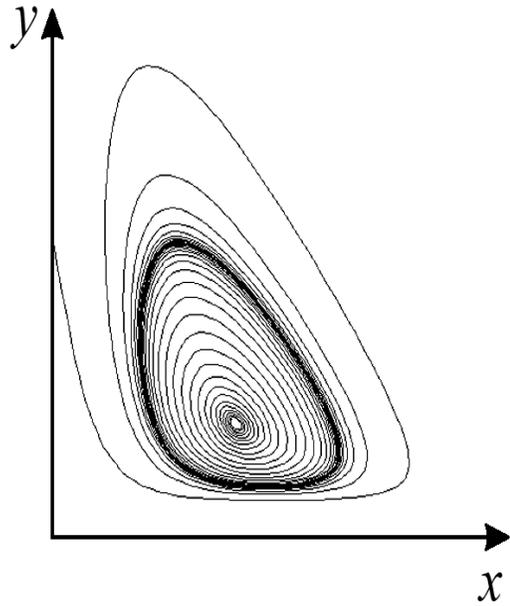
Устойчивые узел и фокус

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$

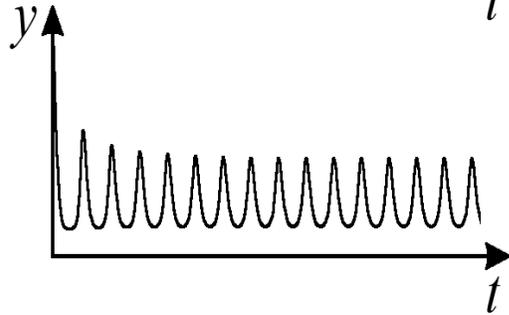
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right),$$



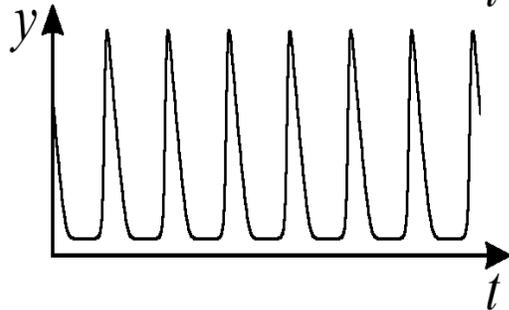
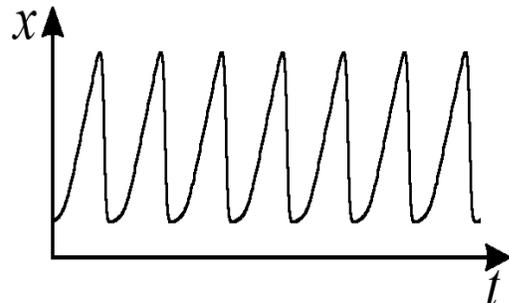
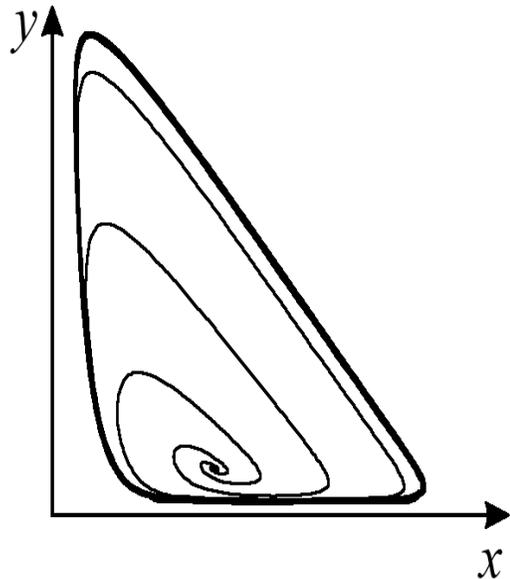
Модель гликолиза (8.10).
 Кинетика изменений концентраций фруктозо-6-фосфата (x) и фруктозодифосфата (y) (справа) и фазовый портрет системы (слева) при разных значениях параметров системы, a – бесколебательный процесс (узел на фазовой плоскости), $\alpha = 0.25$; $r = 1$. b – затухающие колебания (устойчивый фокус на фазовой плоскости), $\alpha = 0.25$; $r = 0.2$.



v



z



Предельные циклы в гликолизе

v – колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл на фазовой плоскости), $\alpha = 6$; $r = 0.24$.

z – релаксационные колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл почти треугольной формы на фазовой плоскости), $\alpha = 8$; $r = 0.5$.

Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\frac{d[\text{F6P}]}{dt} = \frac{d[\text{PEP}]}{dt} + \frac{d[\text{ATP}]}{dt}$$

$$= \bar{V}_{in} + A \sin \omega_e t - V_{\text{PFK}}$$

$$\frac{d[\text{ADP}]}{dt} = - \frac{d[\text{ATP}]}{dt} = V_{\text{PFK}} - V_{\text{PK}}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

\bar{V}_{in} - the mean input flux

ω_e - frequency of the periodic input flux

$$A = \bar{V}_{in}$$

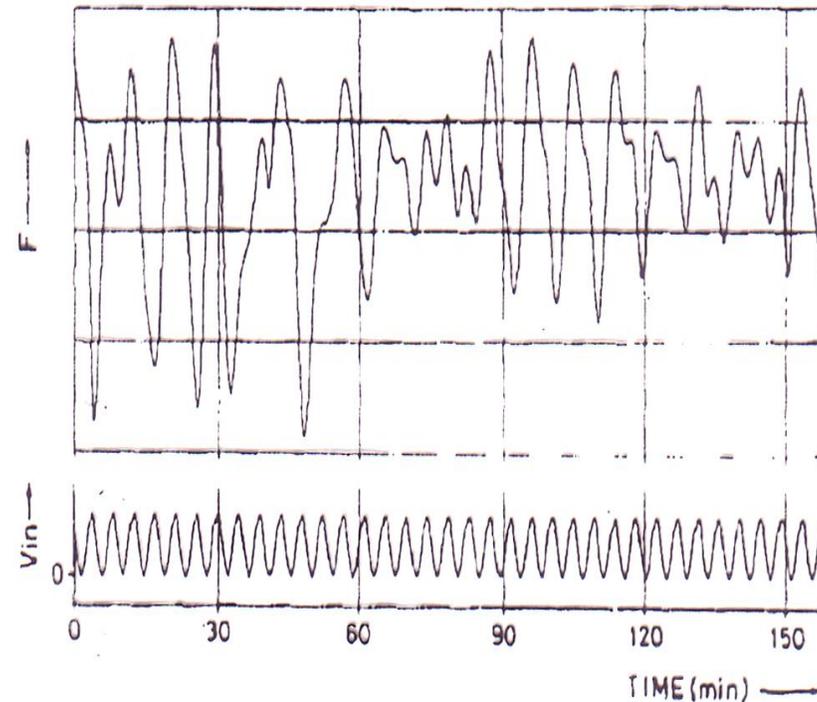
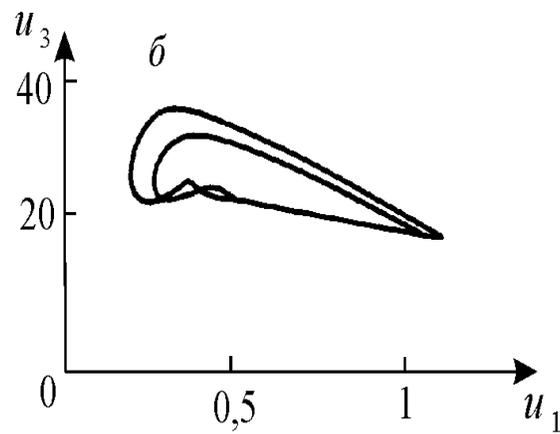
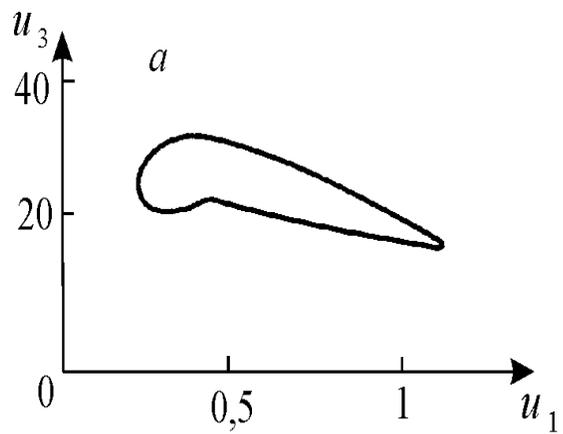
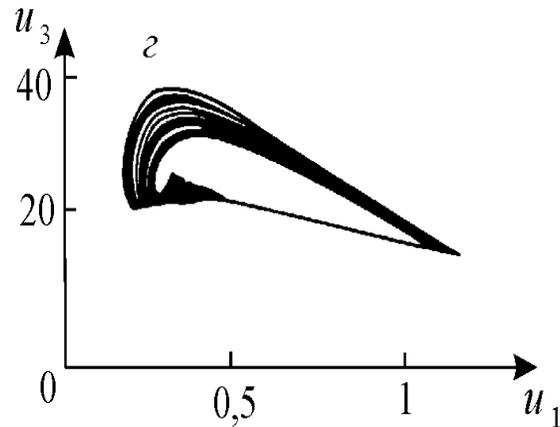
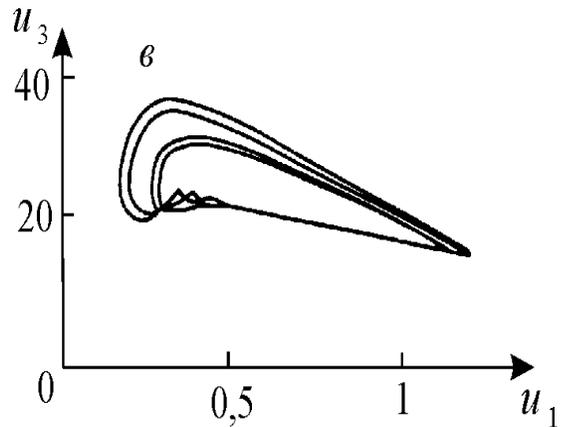


Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).



Странный
аттрактор в
системе хищник
– две жертвы



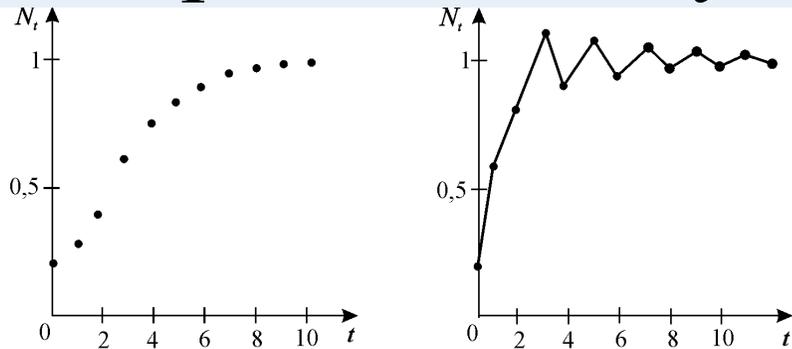
$$\frac{du_1}{dt} = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3),$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3),$$

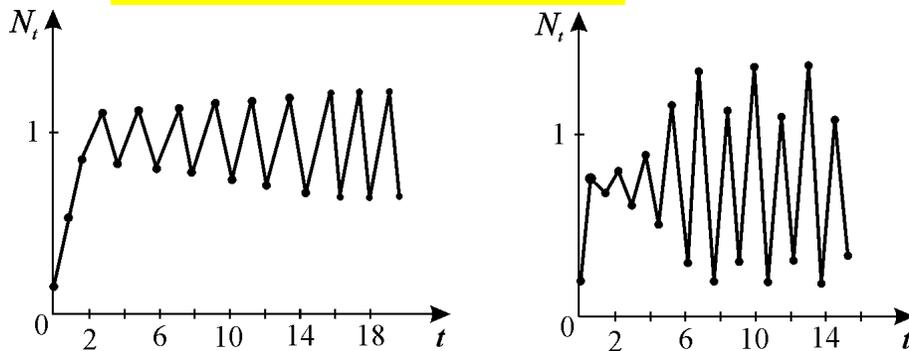
$$\frac{du_3}{dt} = u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апони́на, Ю.Апони́н, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $a - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

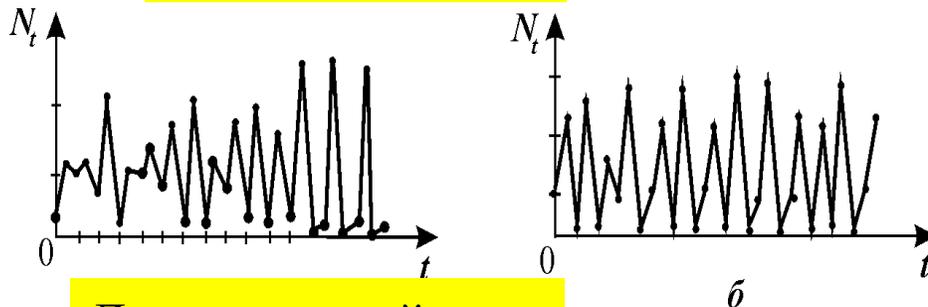
Переход к хаосу через удвоение периода



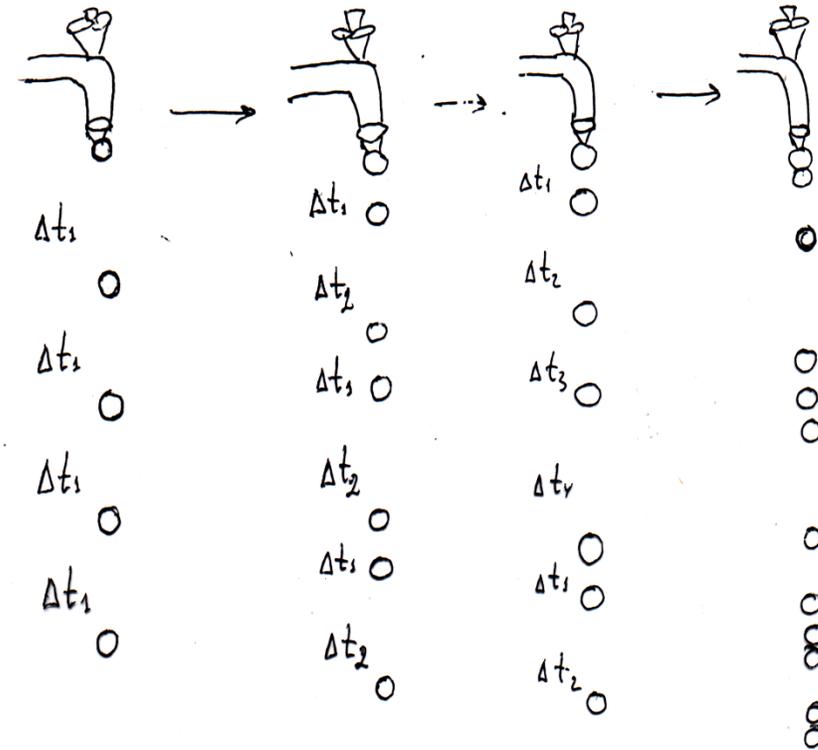
Устойчивое решение



Циклы длины 2k



Динамический хаос



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

Модели замкнутых экосистем

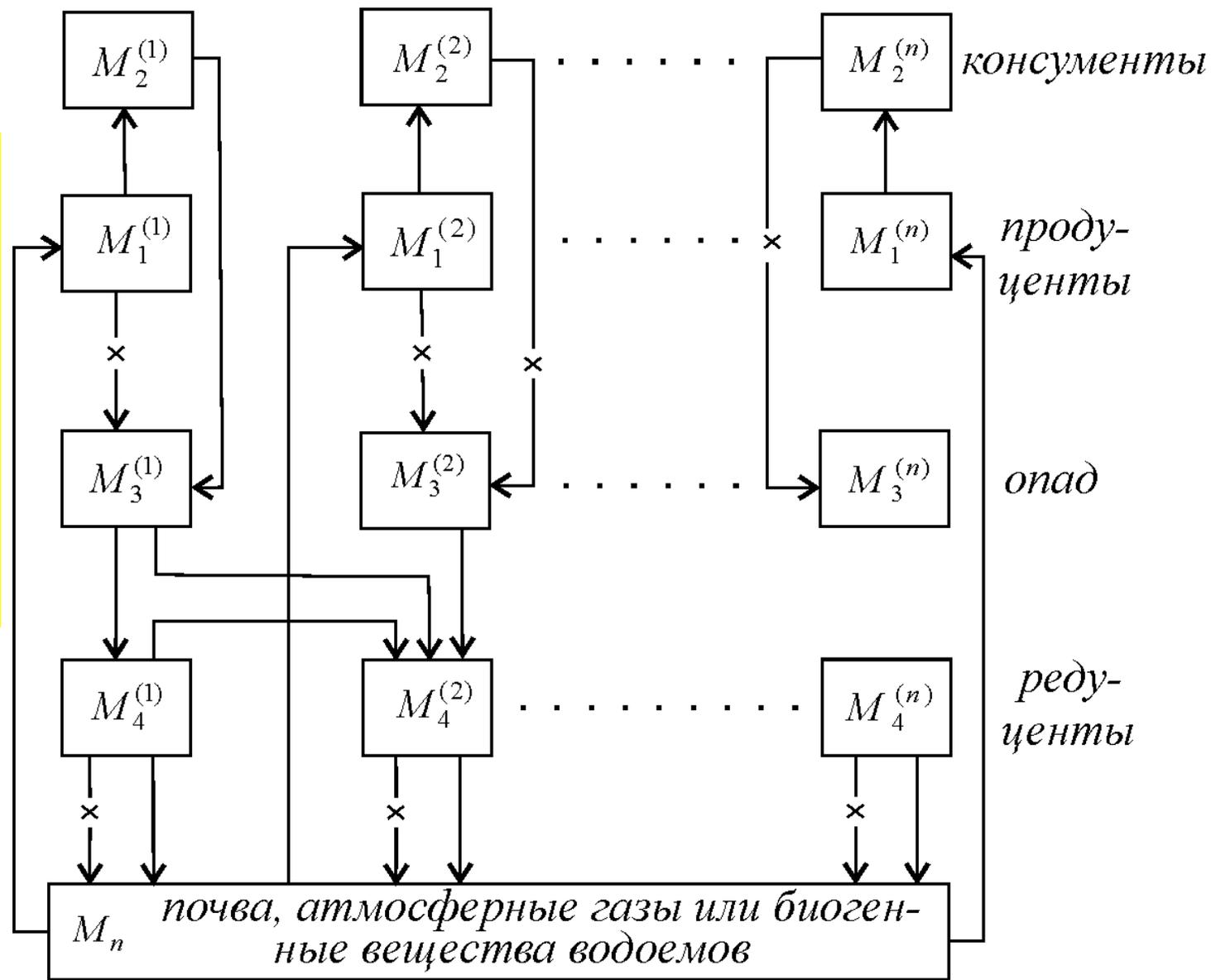
В.В.Алексеев, Крышев И.И.,
Сазыкина Т.Г.
Физическое и математическое
моделирование экосистем



**Вячеслав Викторович
Алексеев (1940-2007)**

Физик, эколог, геофизик.
Динамика процессов в
замкнутых экосистемах.
Возобновляемые
источники энергии

Схема потоков
вещества по
трофическим
пирамидам в
замкнутой
экосистеме



$$\sum_{i,k} M_i^k + M_{II} = M$$

Система уравнений для трех трофических уровней

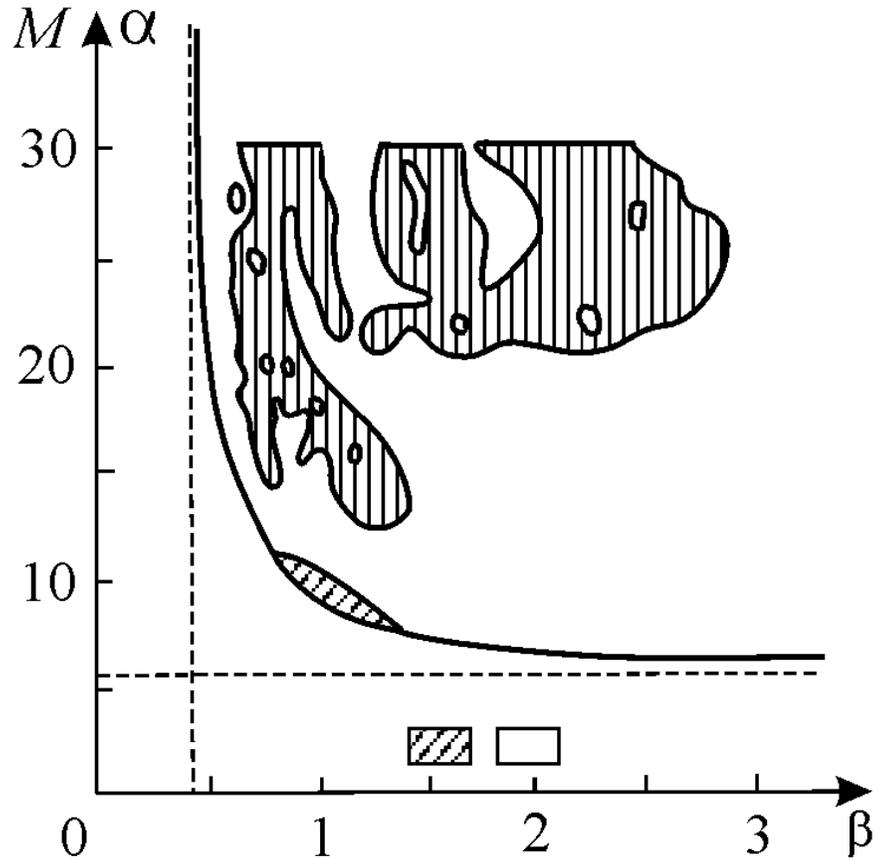
$$dM_1^{(i)} / dt = -\varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} + \gamma_1^{(i)} M_1^{(i)} M_2, \quad \text{растения}$$

$$dM_2^{(i)} / dt = \varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} M_2^i - \sum_{k=1}^n \gamma_2^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(k)}, \quad \text{травоядные}$$

$$dM_3^{(i)} / dt = -\varepsilon_3^{(i)} M_3^i + \sum_{k=1}^n \gamma_3^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(i)}, \quad \text{хищники}$$

$$dM_{\Pi} / dt = \sum_{i=1}^n \left[\varepsilon_3^{(i)} M^{(i)} + \sum_{k=1}^n \left(\gamma_2^{(ik)} - \gamma_3^{ik} \right) M_2^{(i)} M_3^{(k)} - \gamma_1^i M_1^{(i)} M_{\Pi} \right].$$

Области стохастичности (штриховка) для системы два хищника – две жертвы

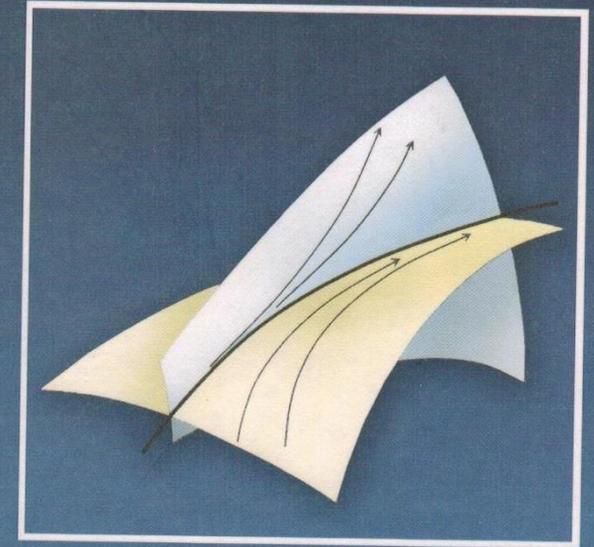


**Александр Юрьевич
Лоскутов** (1960 –
2011)
Профессор
физического
факультета МГУ

В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. О возможности управления системы со странным аттрактором. Проблемы экологического мониторинга, 1985

А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ



Фракталы – самоподобные множества



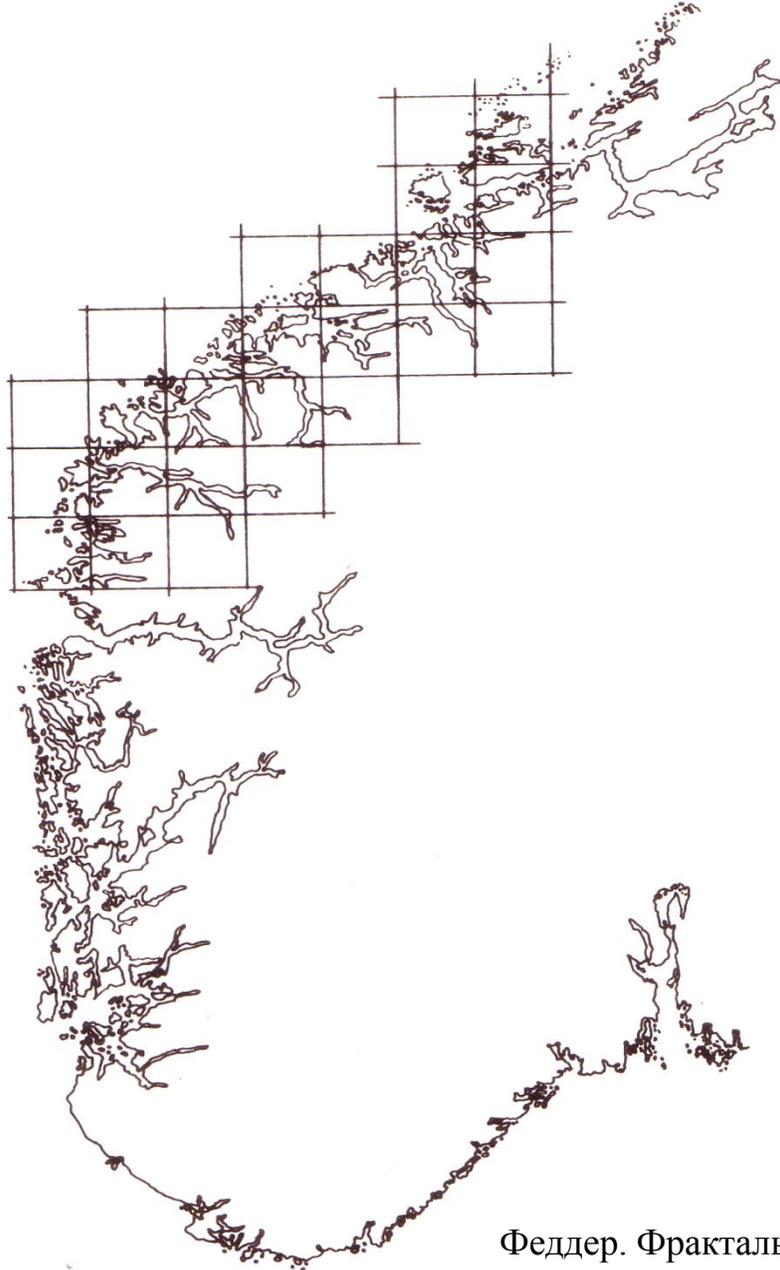
*Benoît
Mandelbrot
1924-2009*

Бенуа Мальдельброт
1924-2010.

Французский и американский математик.

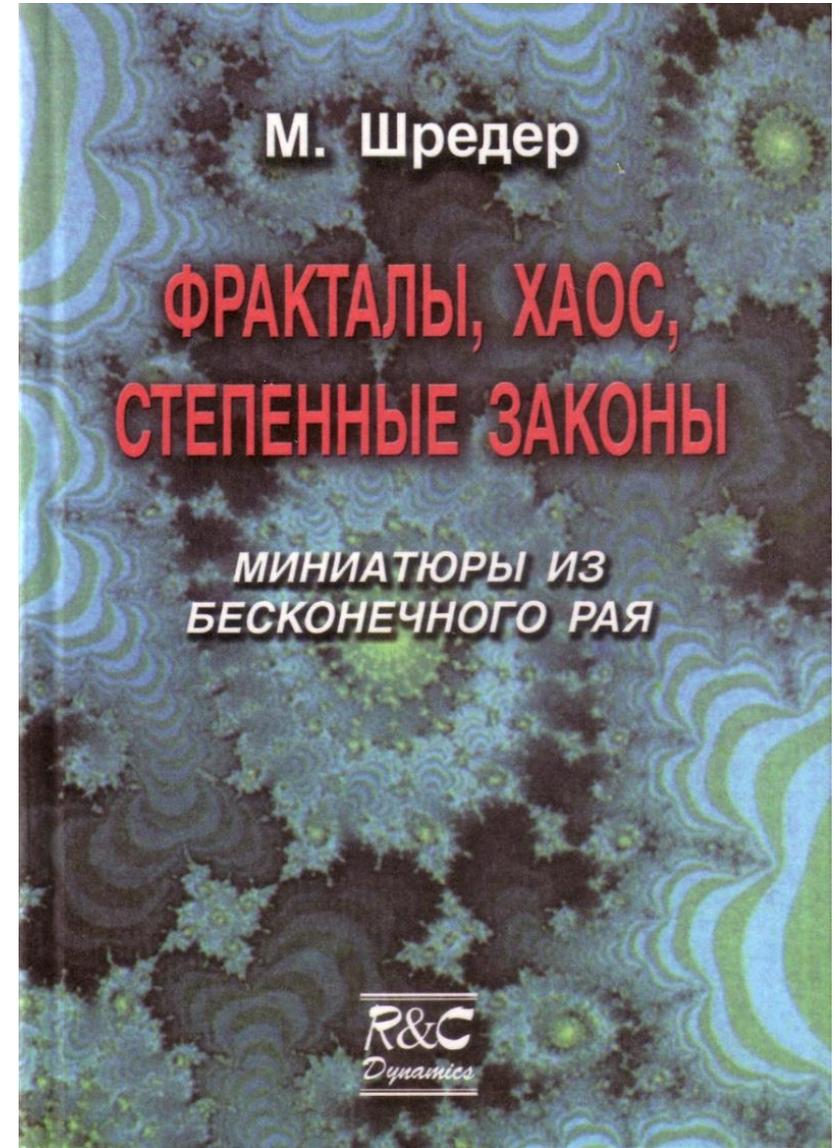
Придумал понятие «фрактал» -
“Fractus” (лат) – сломанный, разбитый.





Феддер. Фракталы

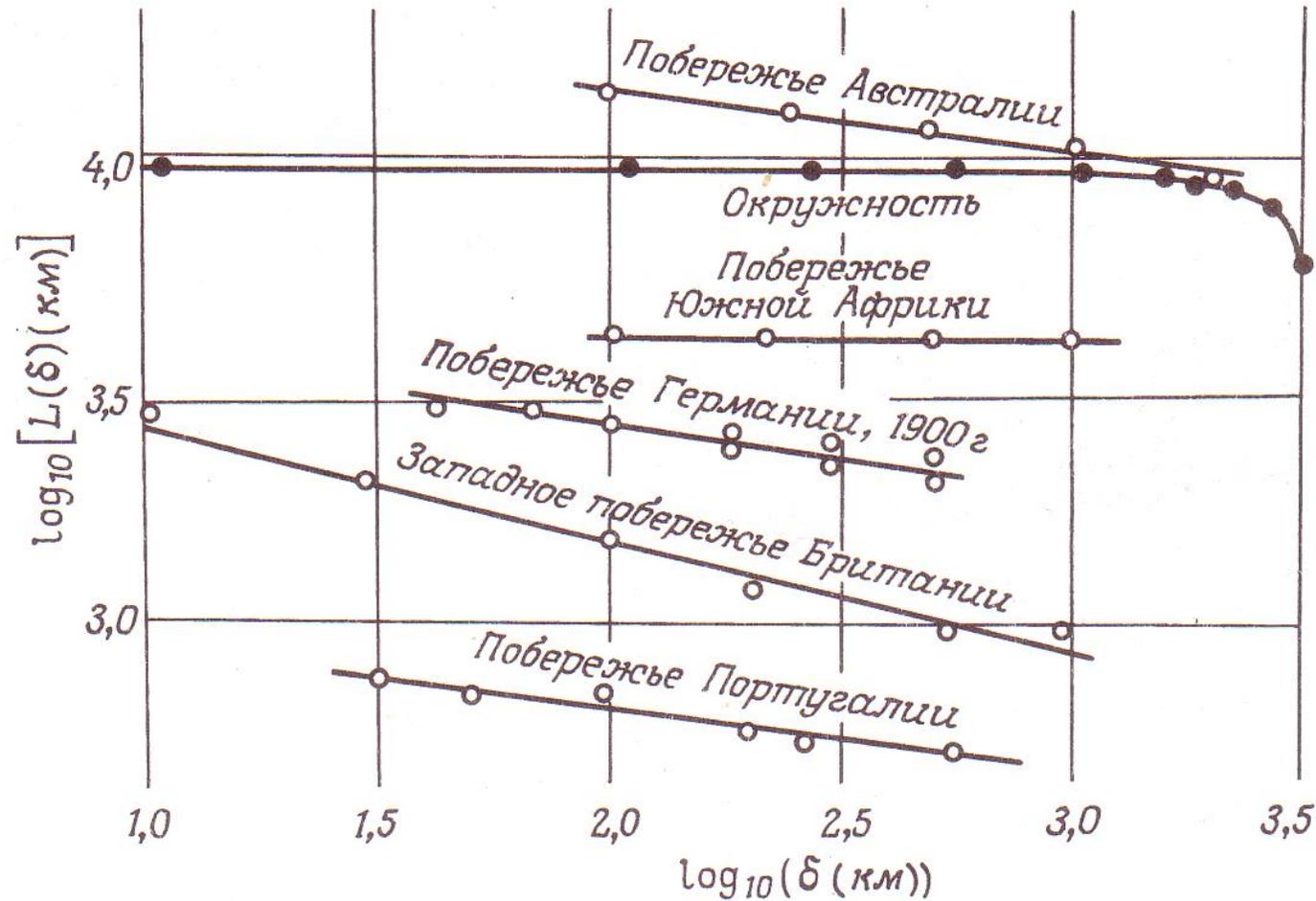
РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.



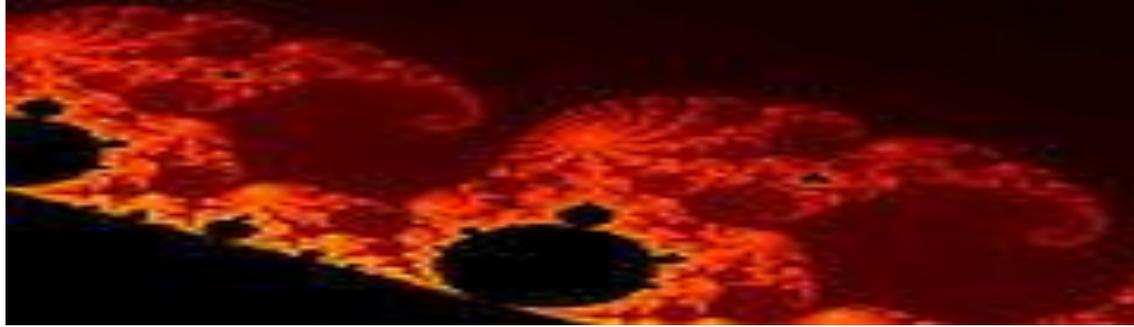
Б.Мандельброт. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Изд. РХД 2009

The Mandelbrot set and beyond. Springer

Длина береговых линий

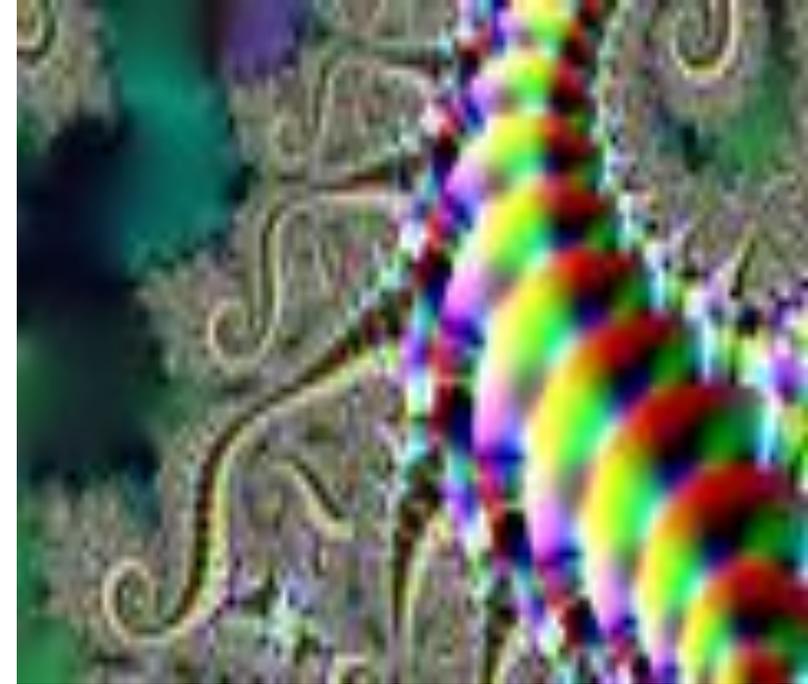


2. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км) [134].



Определение Фрактала

- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.
- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.
- Фракталы – множества точек, вложенные в пространство
- Топологическая размерность линии – 1, поверхности – 2, шара – 3



Фракталы. Размерность

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

$\delta \rightarrow 0$ $N(\delta) \sim 1/\delta^D$

Для обычной кривой множитель a равен количеству отрезков: $a=L_N$, а показатель D равен единице.

Но для береговой линии Норвегии $D \sim 1,52$. Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.



Хаусдóрф Феликс
(Hausdorff Felix, 1868-1942) –немецкий математик один из основоположников современной топологии.

Писатель.
Псевдоним Поль Монгре

Альвеолы человеческого легкого

Оптическая микроскопия – 80 кв. м

Электронная микроскопия –
140 кв. м

$D=2,17$



Мембраны

Субклеточные мембраны в клетках печени

Внешние митохондриальные мембраны $D=2,09$

Внутренние митохондриальные мембраны $D=2,53$

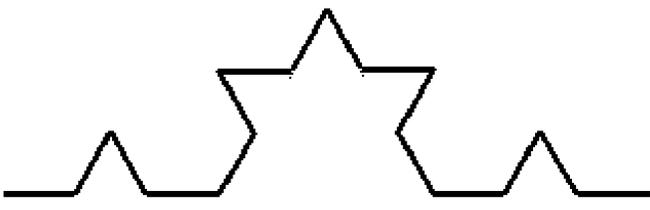


Кривая Коха.

Первые четыре шага построения.

$n=0$ 

$n=1$ 

$n=2$ 

$n=3$ 

фон Кох Нильс Фабьян Хельге (1870-1924),
шведский математик, автор
основополагающих работ по теории чисел



Длина кривой 1-го поколения $L(1/3) = 4/3$.
4 звена, длина каждого – $1/3$

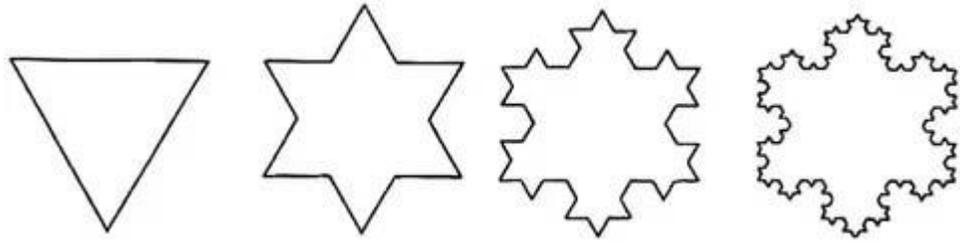
Длина кривой 2-го поколения.

Число звеньев: $N=4^2=16$, длина каждого – $1/9$

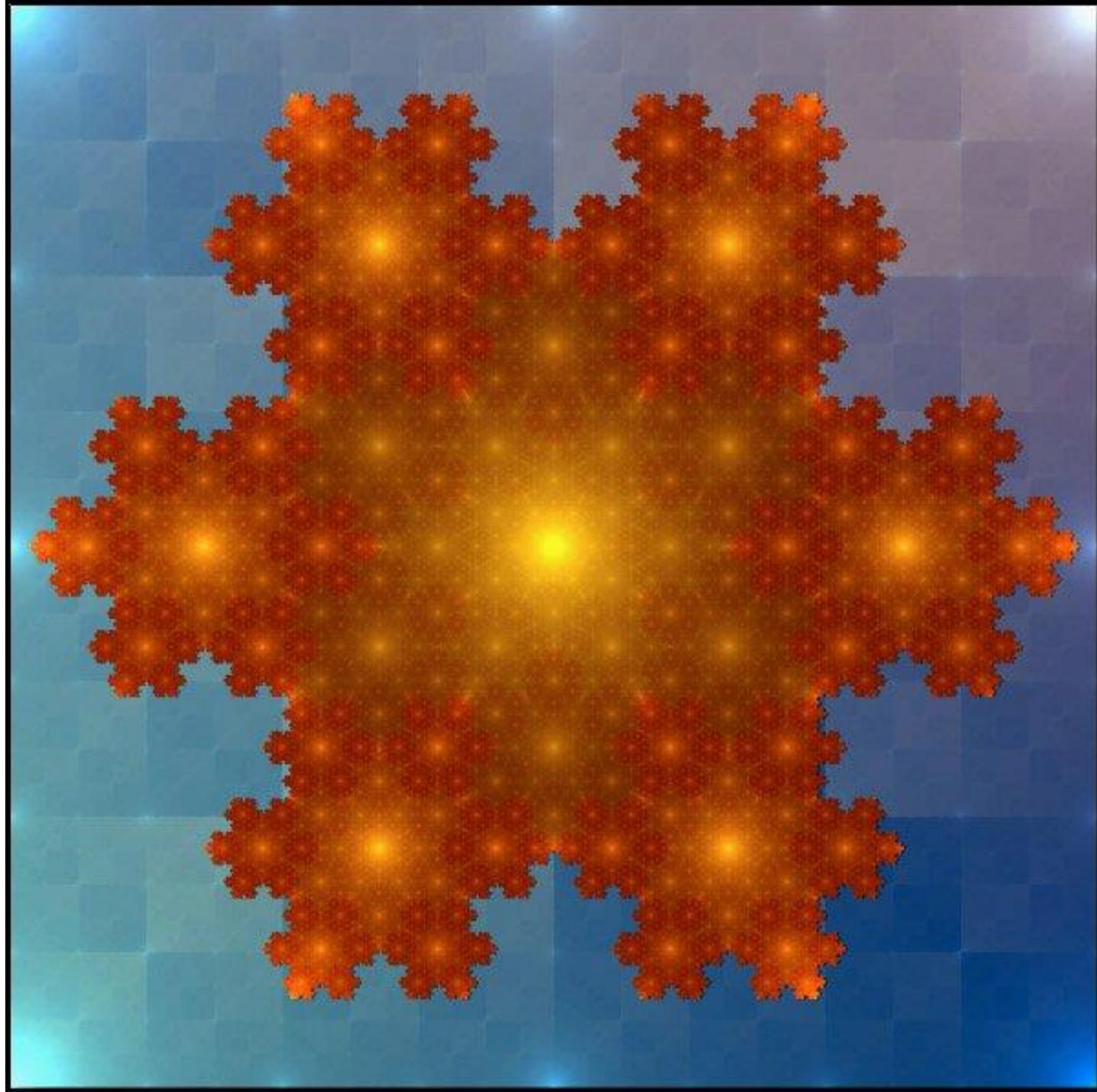
Длина каждого звена: $\delta=3^{-n}$

$n = -\ln \delta / \ln 3$

$L(\delta) = (4/3)^n = \delta^{1-D}$ $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$

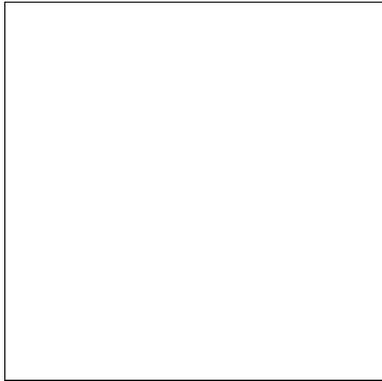


Снежинка Коха

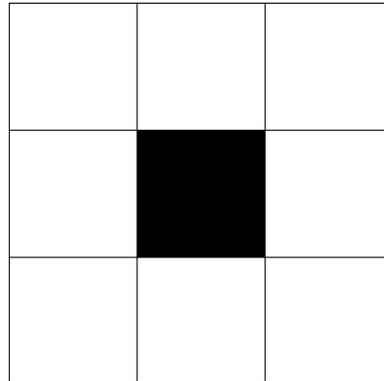


Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной $1/3$. Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной $1/3$ стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$

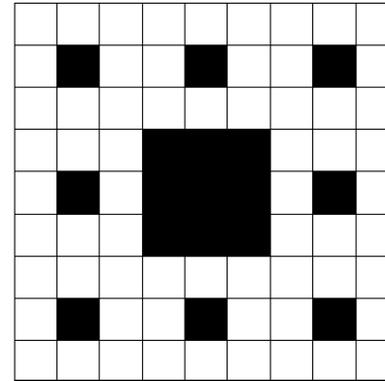
$n=0$



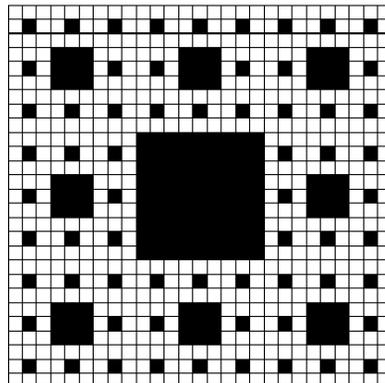
$n=1$



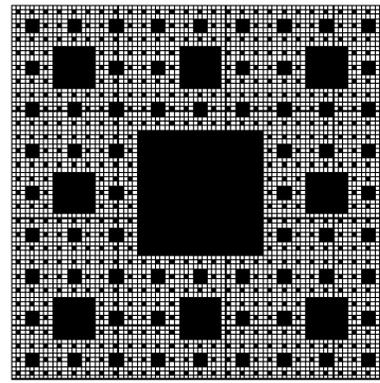
$n=2$



$n=3$



$n=4$

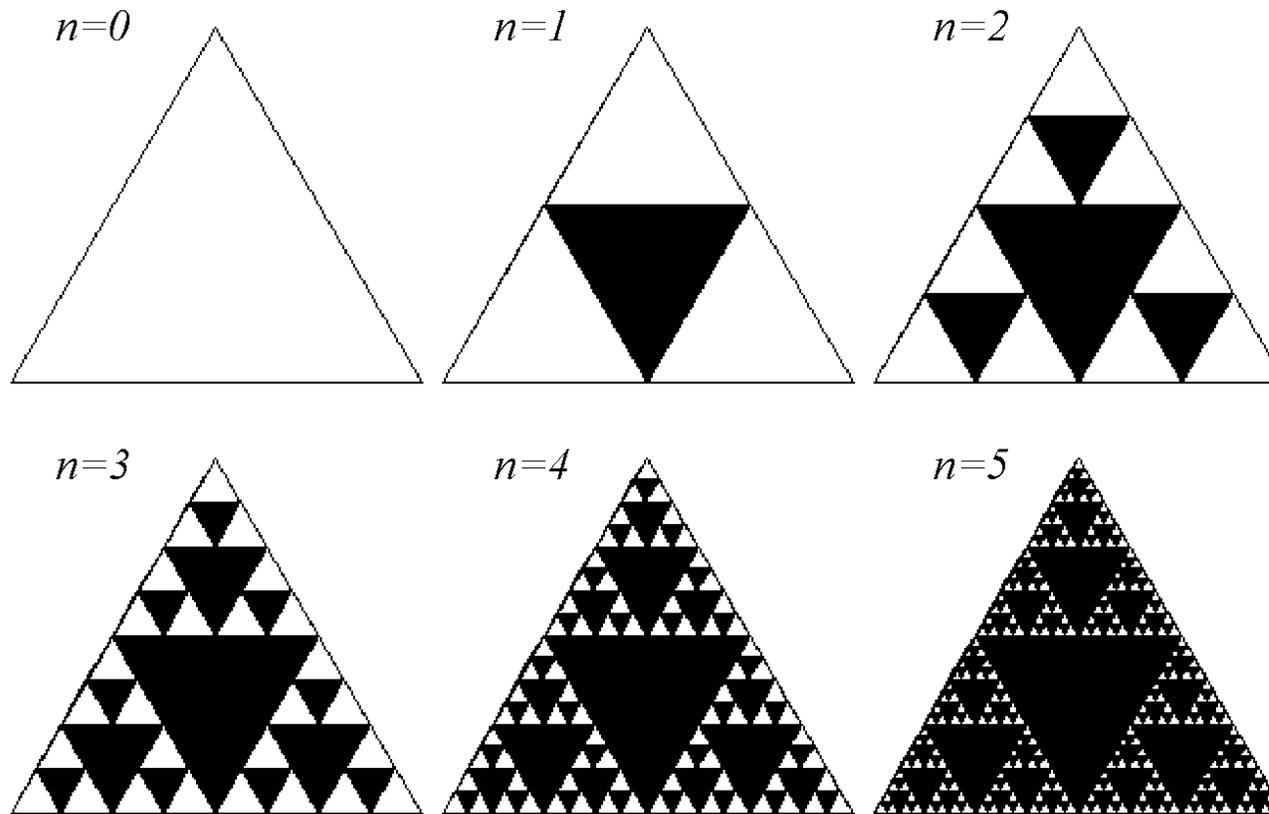


Вацлав Серпинский
(1882-1969)

–польский математик.

Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$



Канторово множество названо в честь великого математика

Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г.

Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение

канторова множества сводится к выбрасыванию из первоначального отрезка все более мелких отрезков



Геóрг Кáнтор

*Georg Ferdinand Ludwig
Philipp Cantor,*

1845 (С.-Петербург) - 1918

немецкий математик

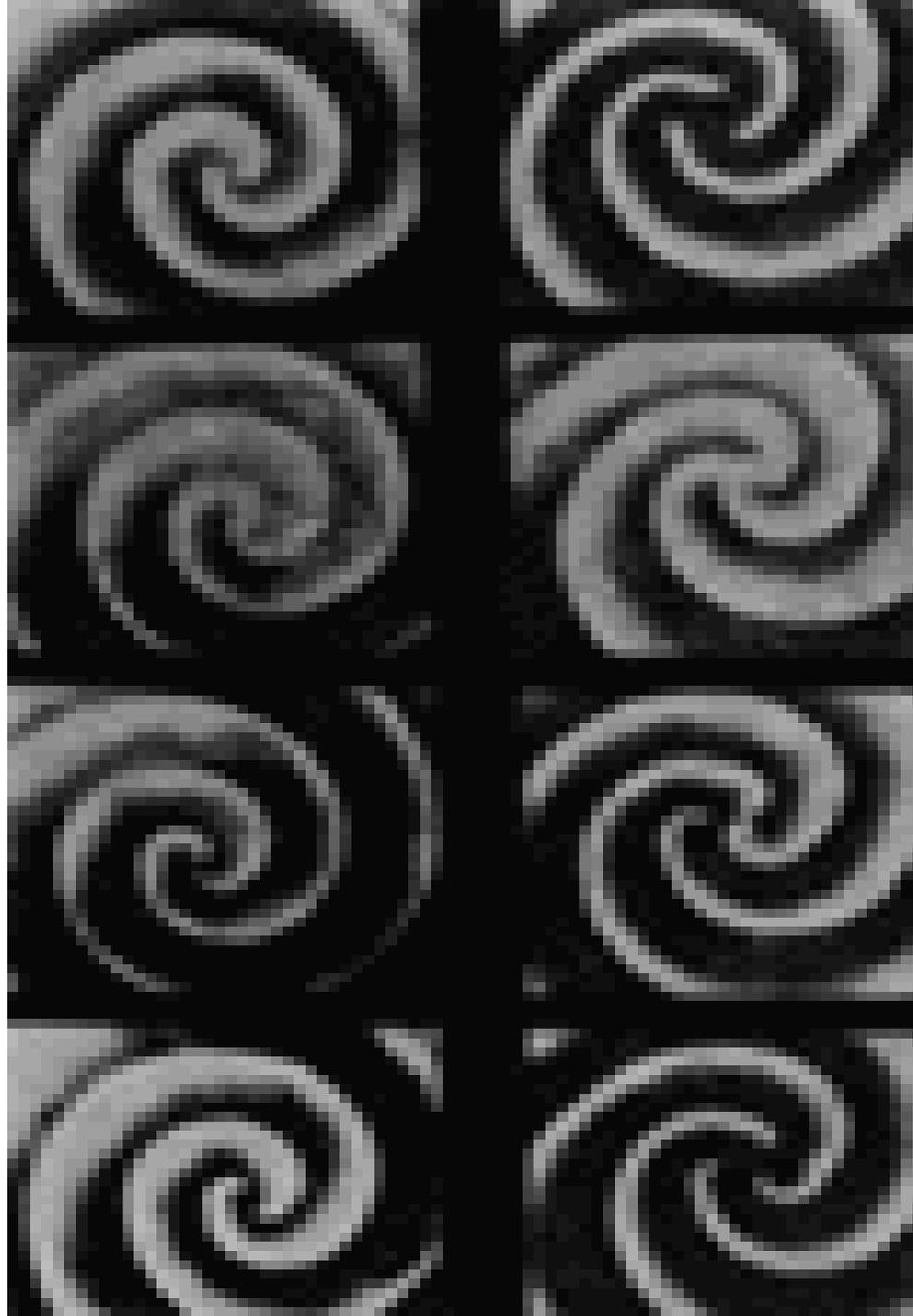
создатель теории множеств

Множество — это объединение определенных различных объектов, называемых элементами множества, в единое целое

Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории
сложных систем

ИКИ-РХД, 2007



Вопросы

- В чем смысл существования квазистохастических детерминированных систем?
- Приведите примеры детерминированных систем с квазистохастическим поведением, поведение которых Вам кажется интересным

82 83
Mathematical
Models in Biology
84 85

Leah Edelstein-Keshet

C • L • A • S • S • E • C • S

In Applied Mathematics

SIAM

40

Leah Edelstein–Keshet

Lee A. Segel, Leah
Edelstein–Keshet
A primer on
mathematical models
in biology
ISBN:

9781611972498

A Primer on
**MATHEMATICAL
MODELS IN
BIOLOGY**

Lee A. Segel
Leah Edelstein-Keshet