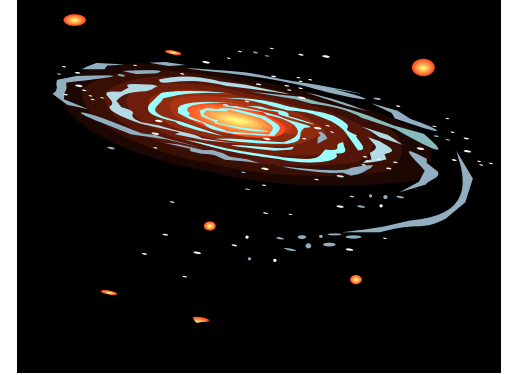
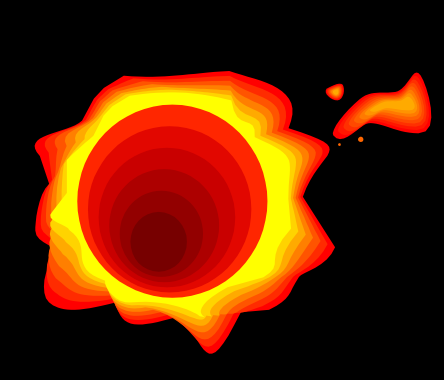




Модели нелинейного мира

www.biophys.msu.ru

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского
государственного университета им. М.В.Ломоносова,
к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

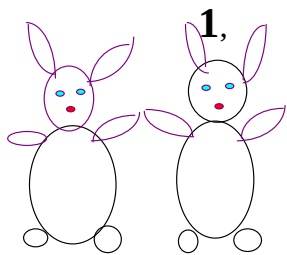
E-mail: riznich@biophys.msu.ru

Лекция 3

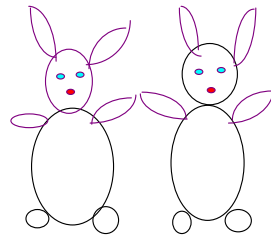
<http://mathbio.ru/mnw>



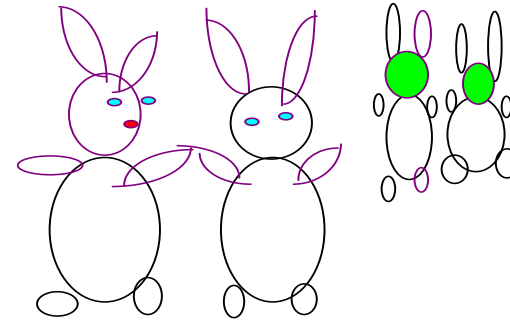
Популяционная динамика ряд Фибоначчи



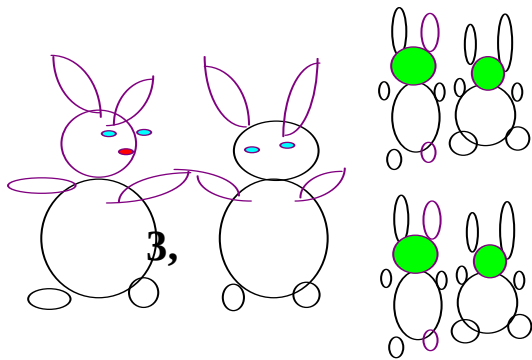
1



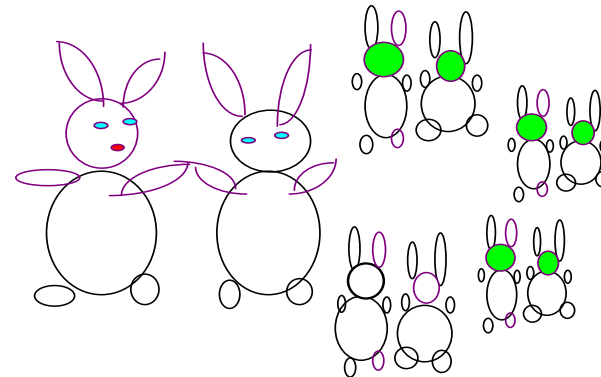
1



2



3



5

Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

Непрерывные модели роста популяций

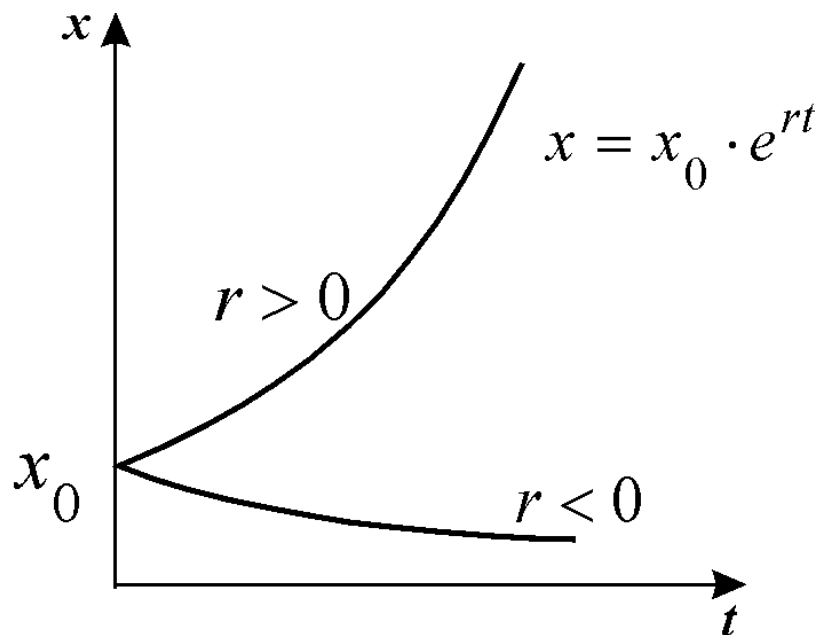
Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)



Томас Роберт
Мальтус
английский
священник
демограф и
экономист
1766-1834

$$N_{t+1} = qN_t \quad N_{t+1} = q^n N_0$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



Схемы роста в терминах системного анализа

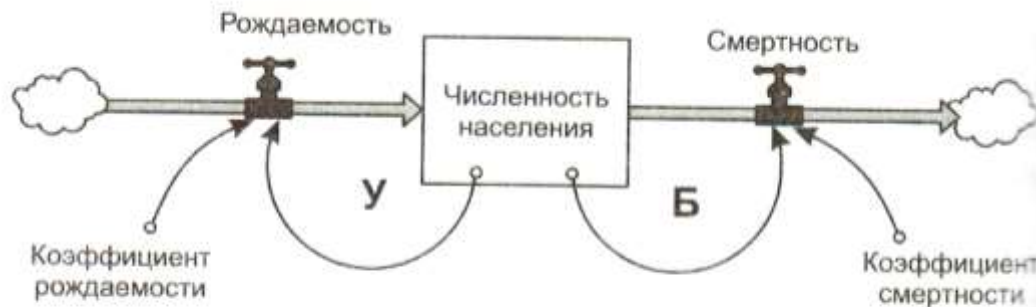


Рис. 21. Численность населения зависит от усиливающего цикла, описывающего рождаемость, и балансирующего цикла, описывающего смертность

Чем больше величина физического капитала (оборудование и заводы) и чем выше эффективность производства (объем производства на единицу капитала), тем больше годовой выход продукции



Рис. 27. Как и в структуре с численностью населения, экономический капитал зависит от усиливающего цикла, ответственного за рост (инвестиции в виде доли от годового объема производства), и балансирующего цикла, ответственного за снижение капитала (амортизация)

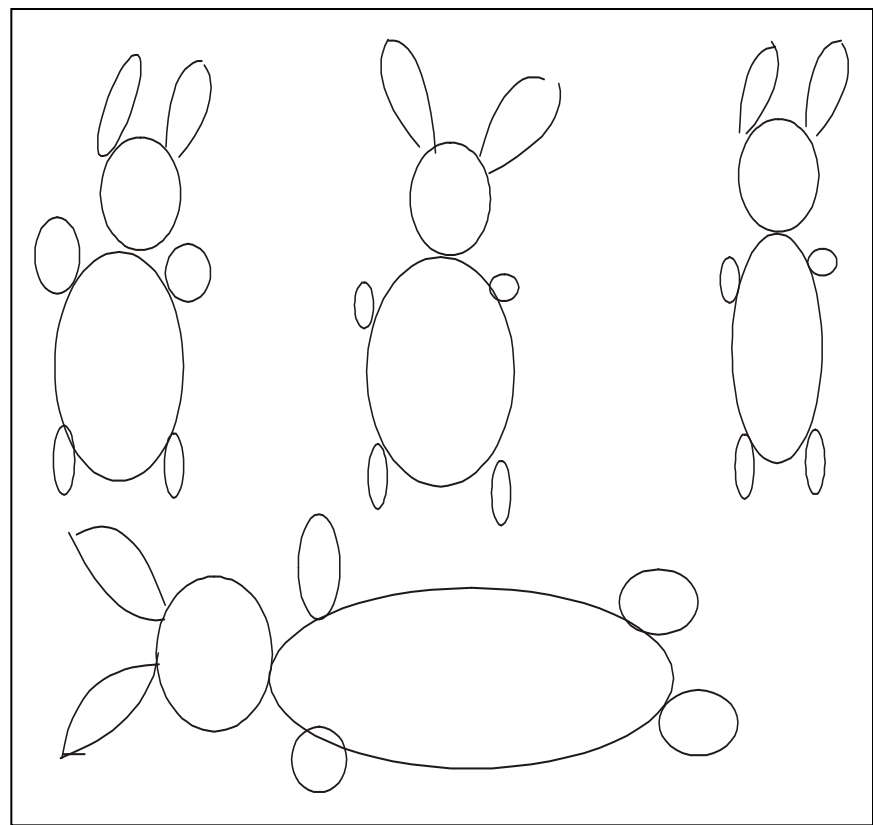
Уравнение
логистического
роста (Ферхюльст, 1845)



$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

r – константа скорости роста

K – емкость экологической ниши



K – системный фактор

Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

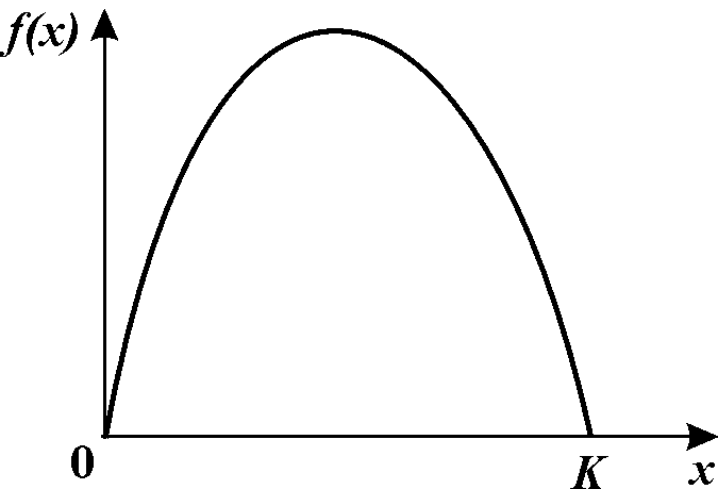
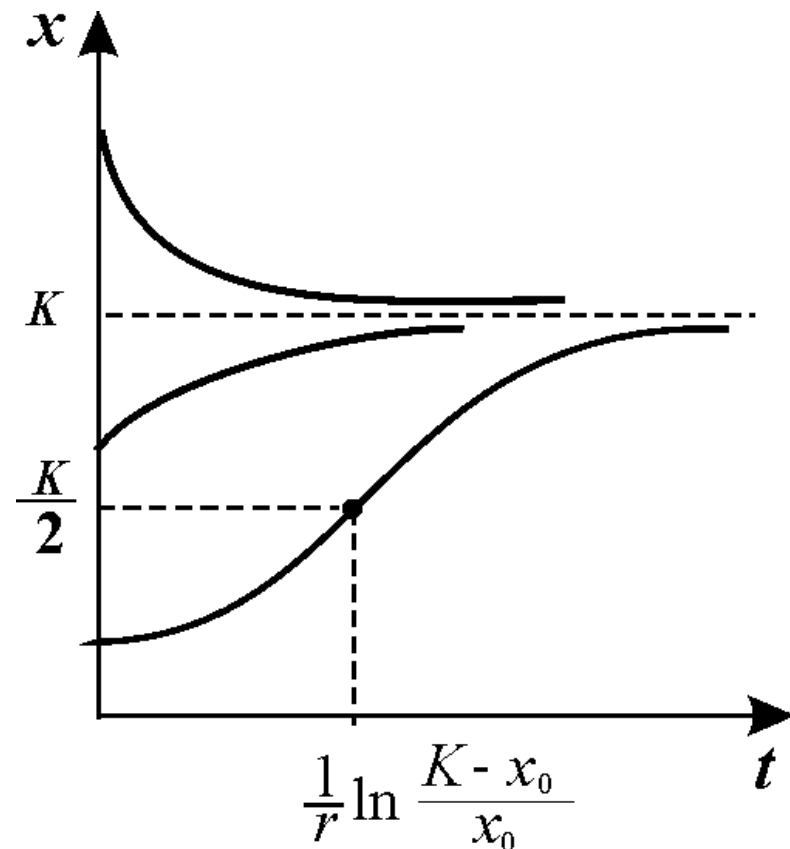


График функции $f(x)$

Задание математикам и физикам

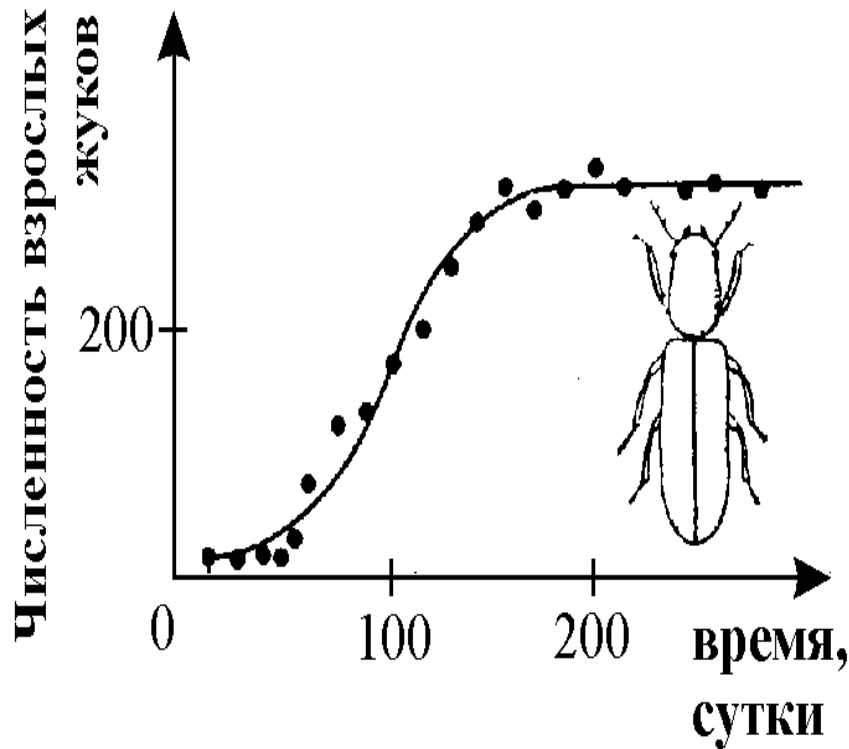
1. Решить уравнение Ферхюльста При заданном x_0 .
2. Найти координаты точки перегиба



Поведение x во времени

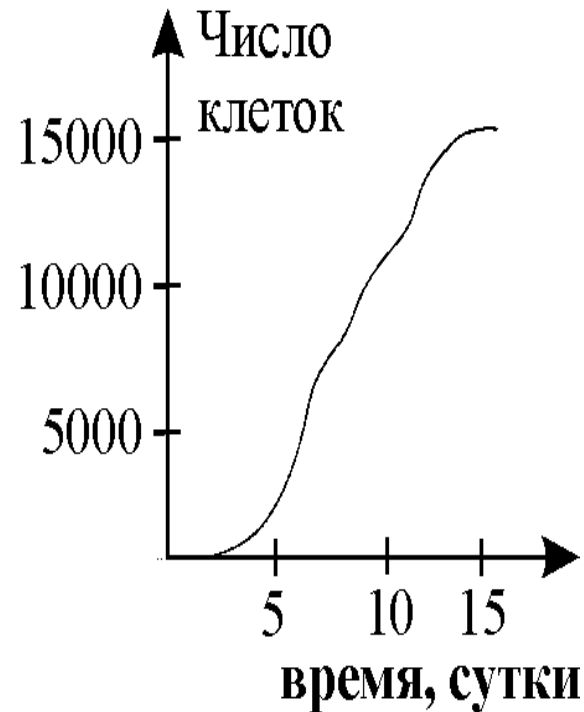
Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$



a

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).



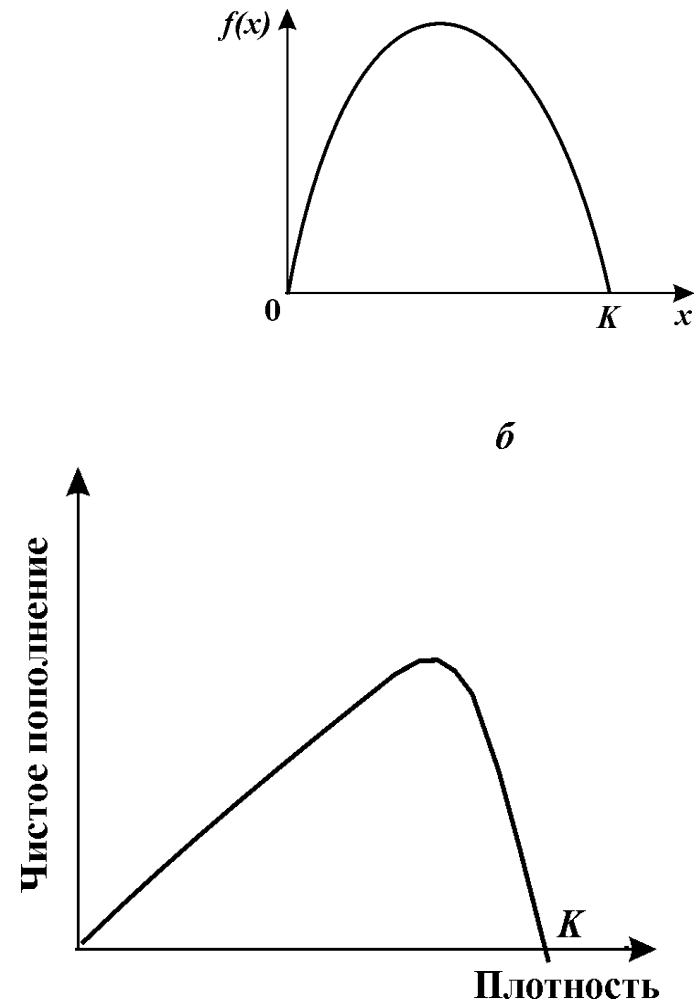
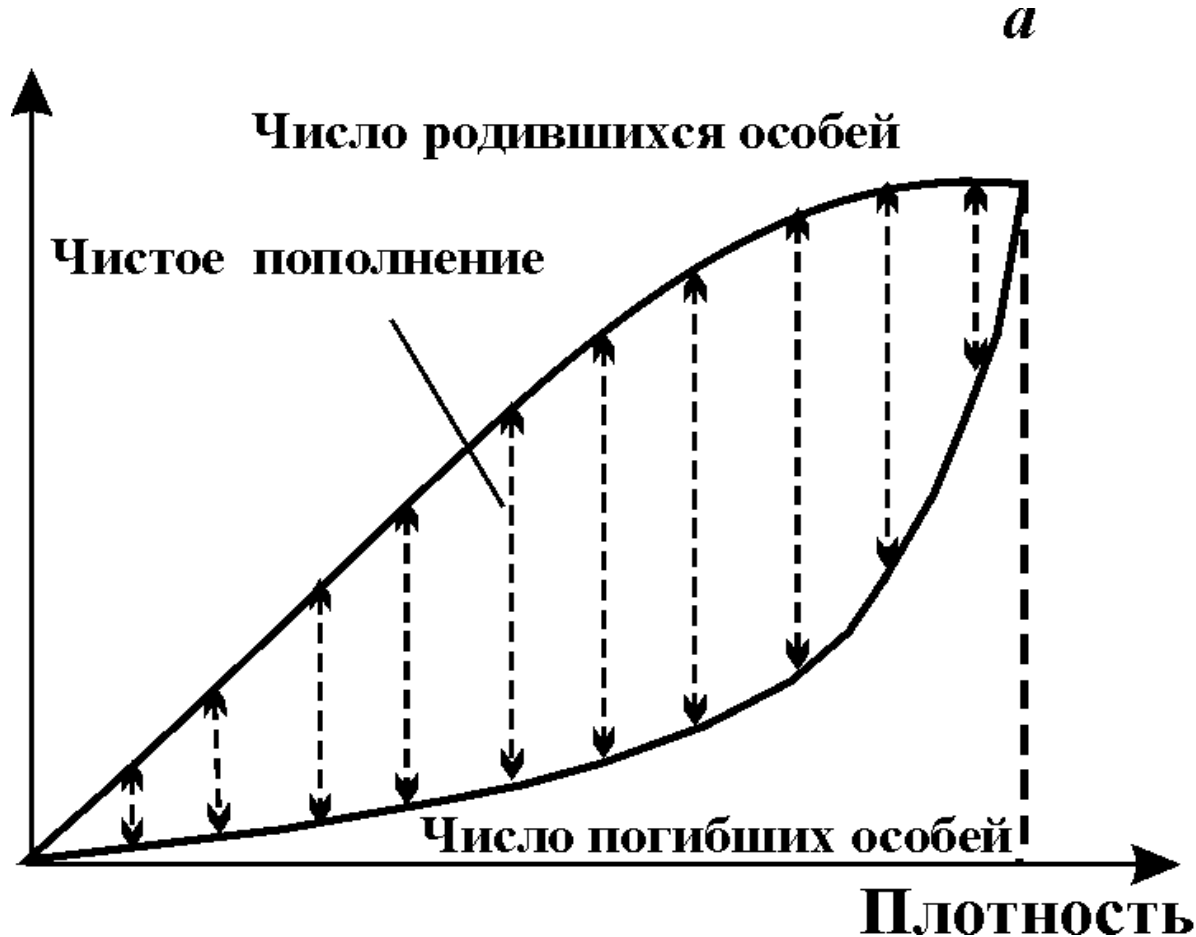
б

Водоросль *Chlorella* в культуре

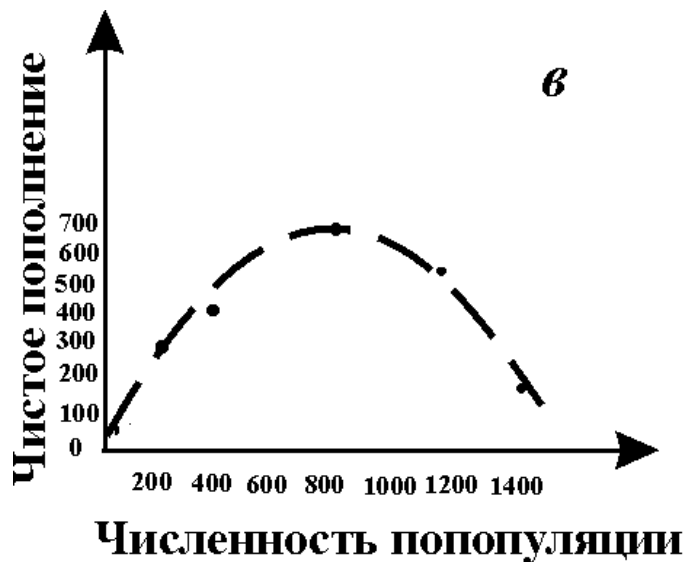
(Pearsall, Bengry, 1940)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

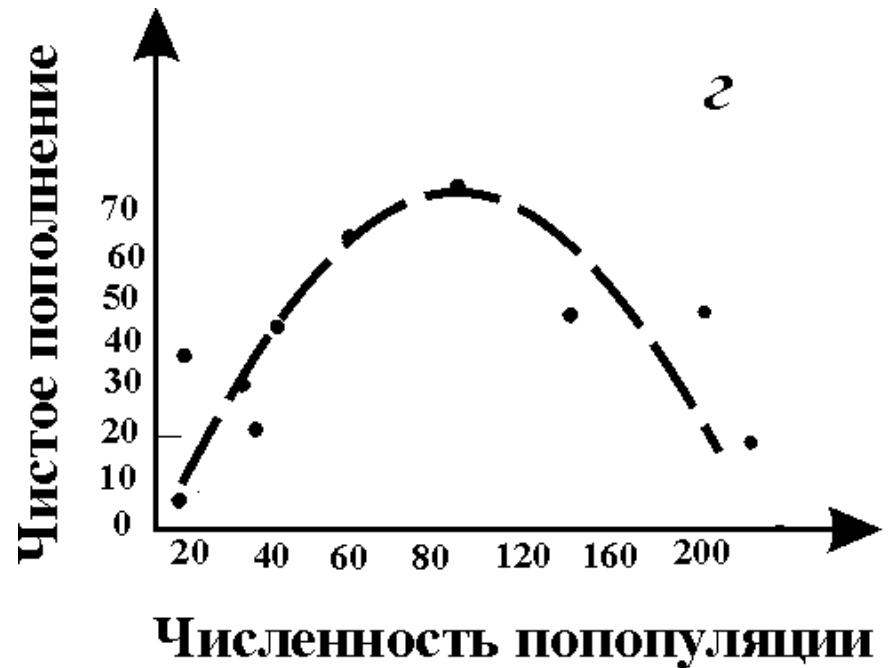
Кривые пополнения



Примеры кривых пополнения (1)

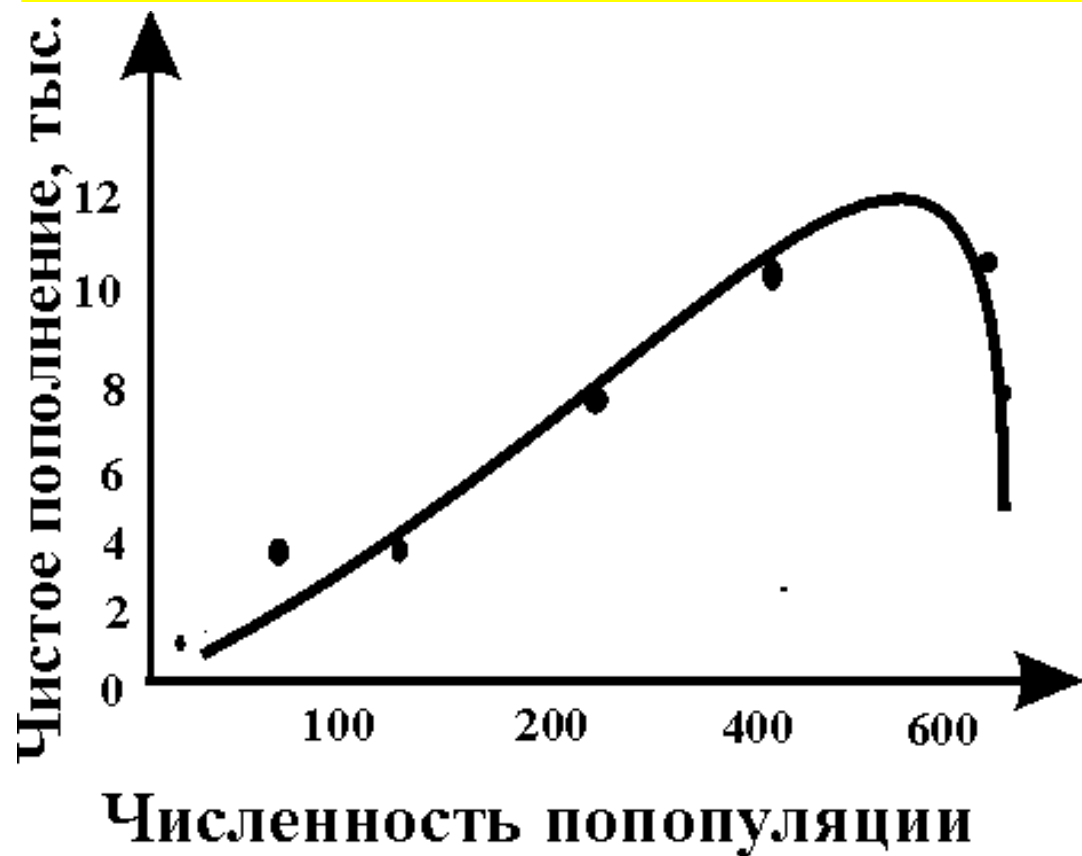


численность фазана обыкновенного
на о. Протекшн - Айленд
после его интродукции в 1937 г.
(Einarsen, 1945);



экспериментальная популяция
плодовой мушки *Drosophyla*
melanogaster (Pearl, 1927)

Примеры кривых пополнения (3)

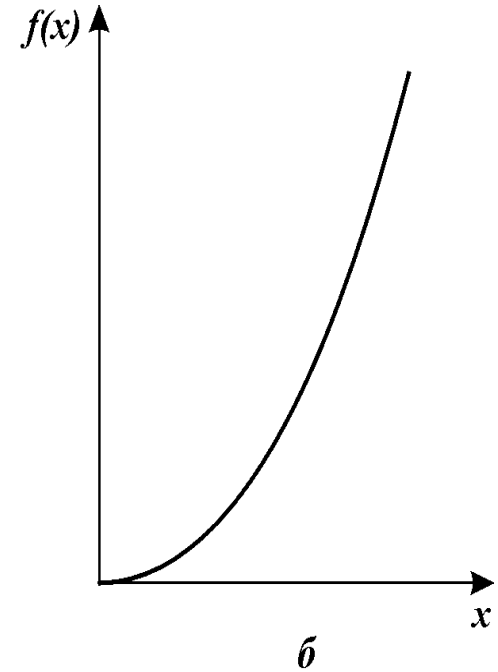
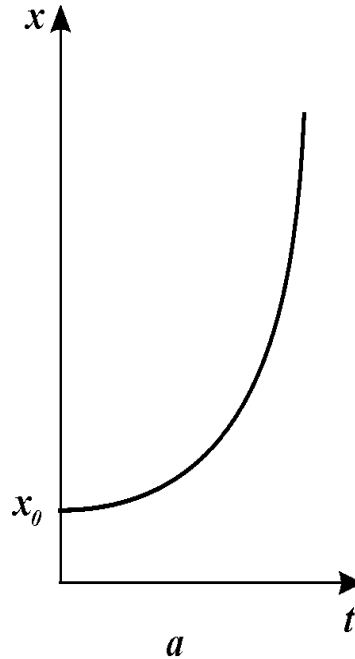


оценка
численности
арктического
финвала
(Allen, 1972)

Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

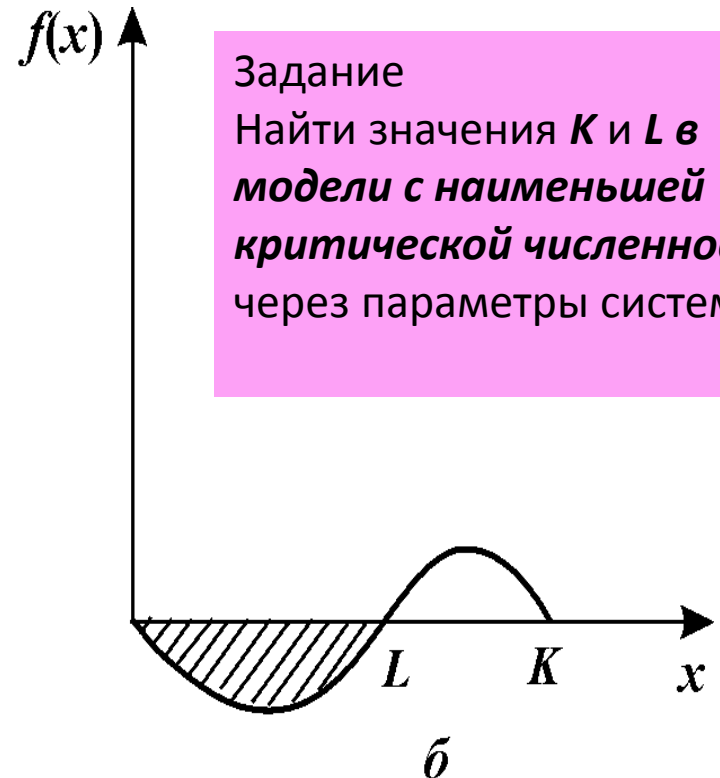
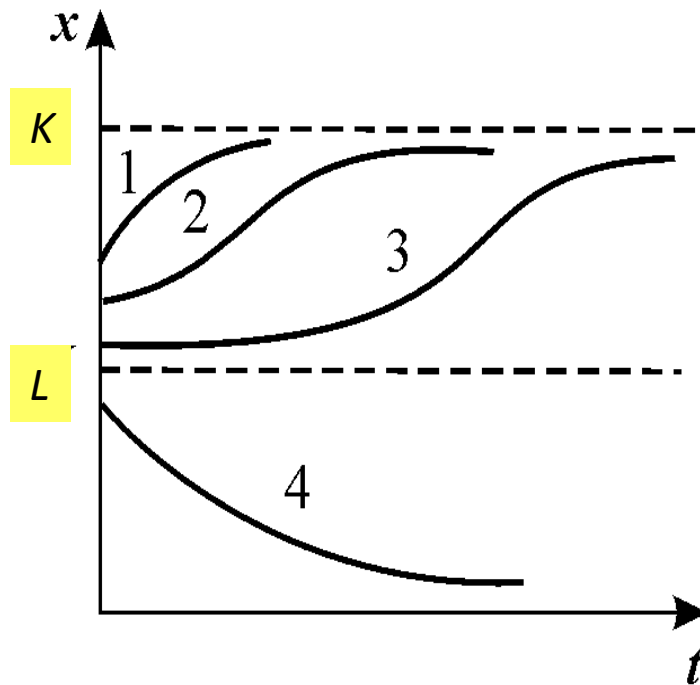
$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$



При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.

При высоких – числу самок в популяции.

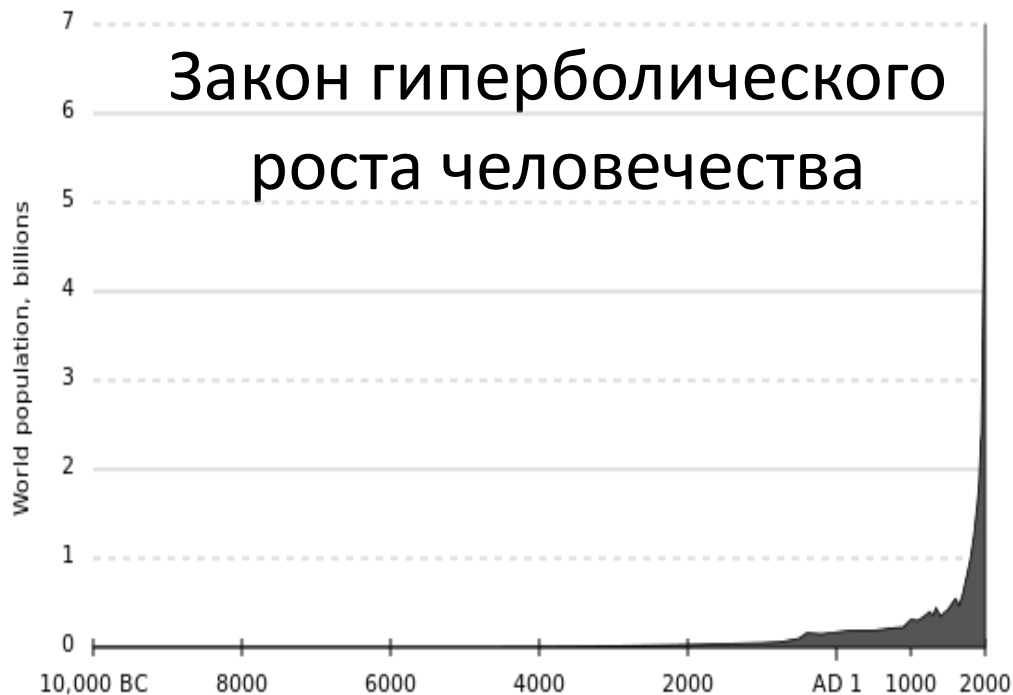
Наименьшая критическая численность



Задание

Найти значения K и L в модели с наименьшей критической численностью через параметры системы

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$



Хайнц фон
Фёрстер
1911-2002
Физик,
математик,
демограф

- *H. von Foerster, P. Mora, L. Amiot*
Doomsday: Friday, 13 November,
A.D. 2026. At this date human
population will approach infinity if it
grows as it has grown in the last two
millennia // *Science*. — 1960. —
№ 132. — P. 1291—1295.

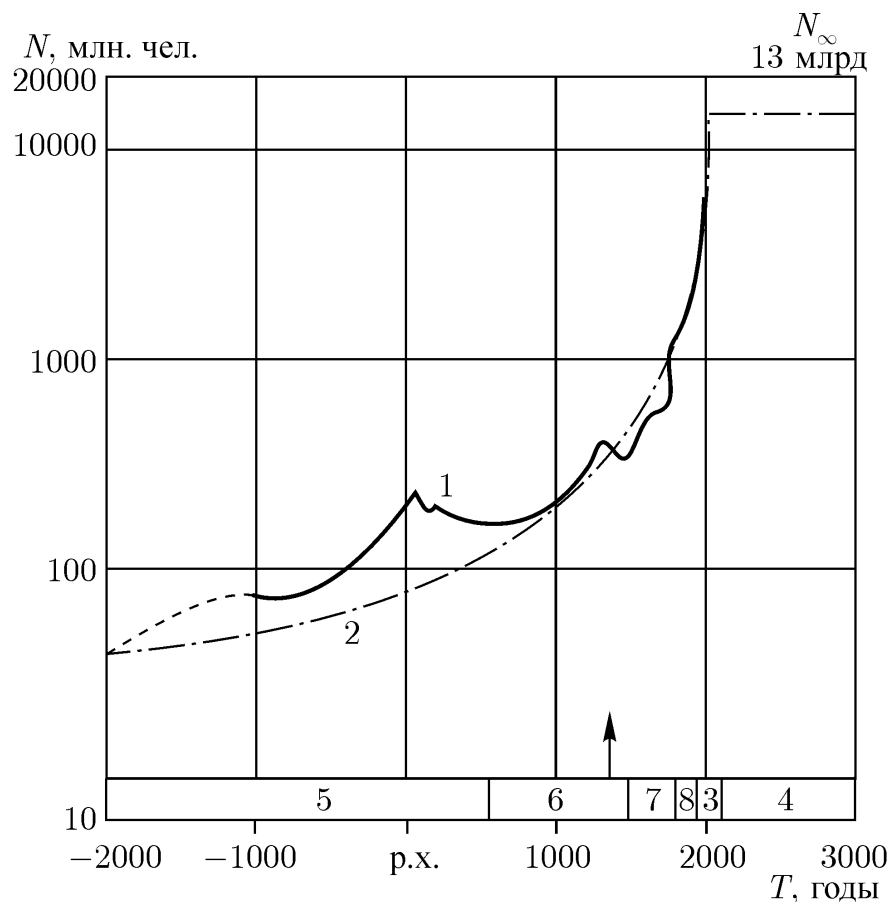


Сергей Петрович Капица
(1928-2012)

Общая теория
роста человечества 1999

Г.Ю.Ризниченко
А.Б.Рубин
Биофизическая динамика
продукционных процессов
2004. Глава 8

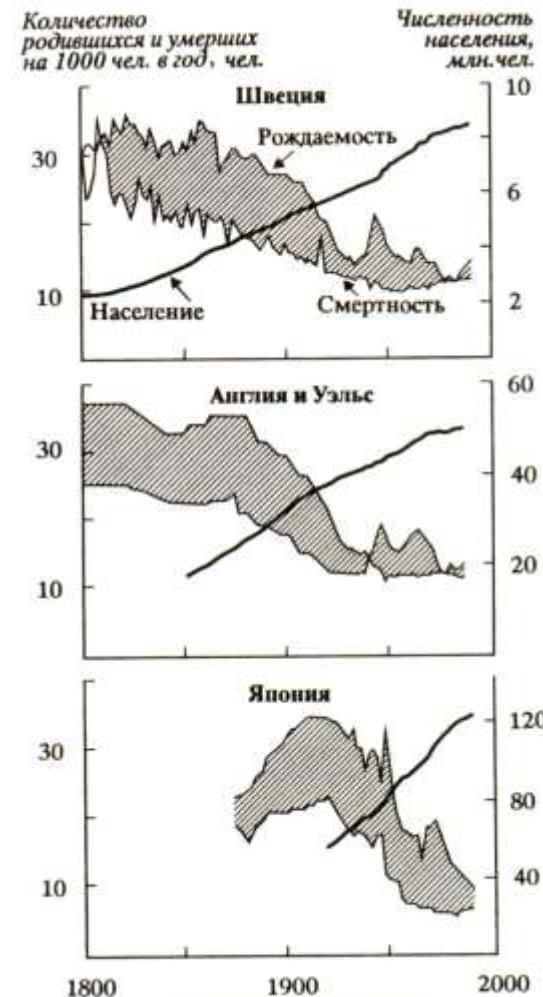
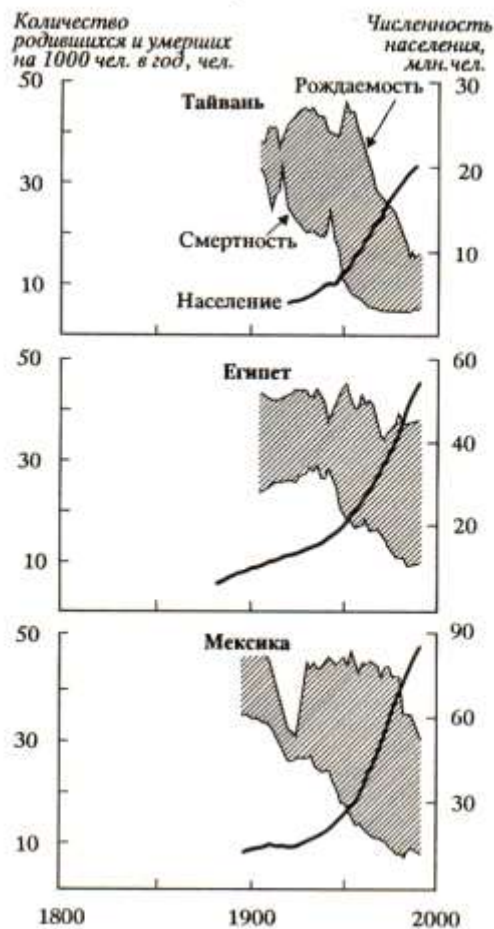
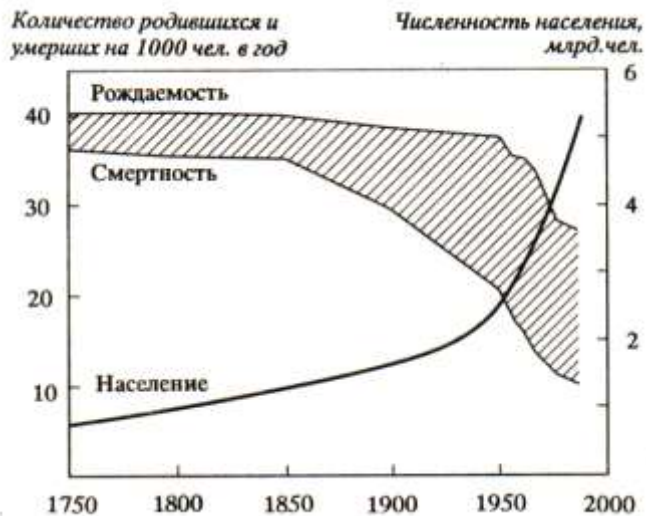
Динамика численности человечества



Сергей
Павлович
Курдюмов
1929-2004

Тема для
доклада

Прирост численности населения (пополнение)



С учетом демографического перехода

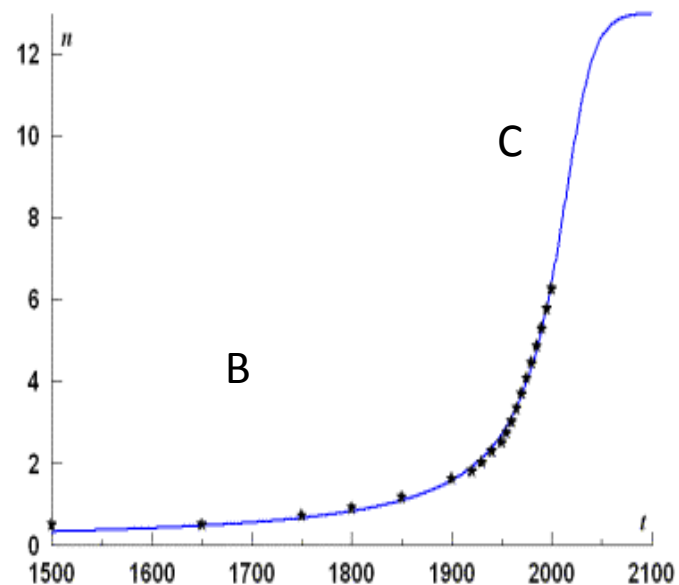
$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcsctg} \frac{T_1 - T}{\tau},$$

$$C = 186 \times 10^9 \text{ лет}, T_1 = 2007 \text{ год}, \tau = 42 \text{ года},$$
$$K = \sqrt{C/\tau} = 67000.$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2(n_t - n)}{C/n_t}$$

n_t – численность на момент
демографического
перехода

Численность человечества



В первой - эпохе А, длительностью 2,8 миллиона лет - происходит линейный рост, переходящий затем в гиперболический рост эпохи В, который завершается после 1965 года демографическим переходом С.

После демографического перехода прирост численности на протяжении жизни поколения становится сравнимым с самим населением мира. И численность начнет стремиться к асимптотически стабилизированному режиму эпохи С, то есть неуклонно приближается к пределу в 14 миллиардов. Это в 2,5 раза больше, чем в настоящее время.

Модель глобального роста

- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень

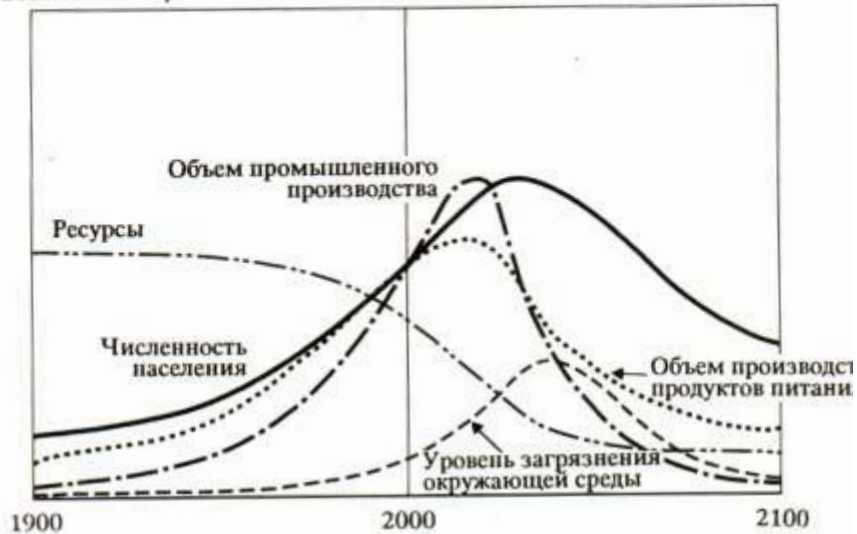
Альберт Эйнштейн

- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука, 1978
- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Meadows D. et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974
- Медоуз Д. и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991
За пределами роста 1994
Пределы роста 30 лет спустя. 2008

АЗБУКА СИСТЕМНОГО МЫШЛЕНИЯ. Бином 2011

Принятие мер в 1995 году

Состояние мира



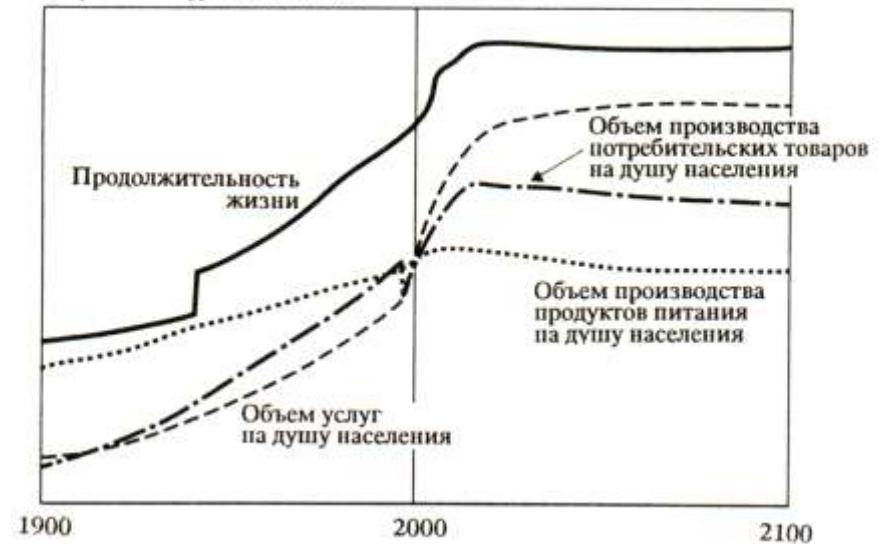
Состояние мира



Материальный уровень жизни



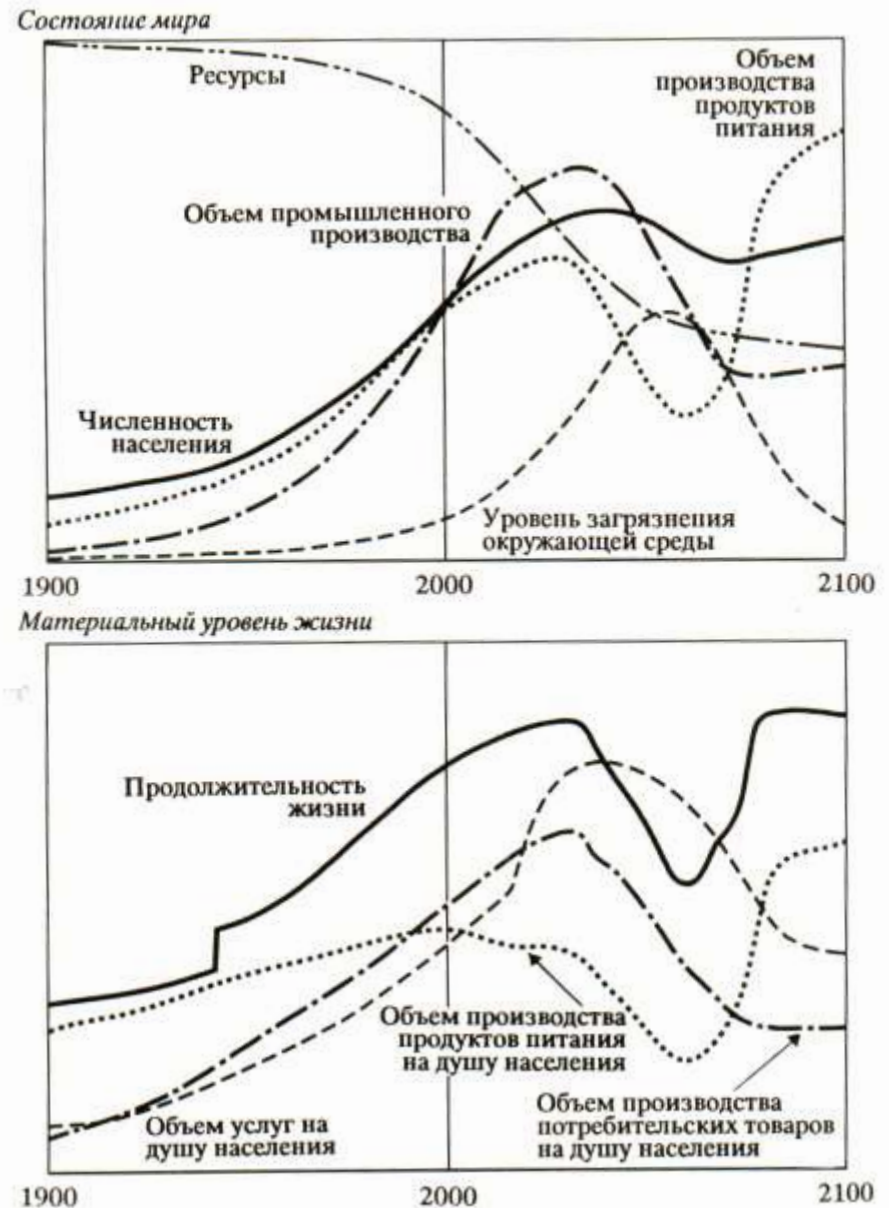
Материальный уровень жизни



Принятие мер в 2015 году

Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса

Тема для реферата
Современная глобальная динамика



Задание

Привести (из своей области) примеры процессов, которые могут быть описаны кривой с насыщением. Взаимодействие каких процессов более низкого уровня приводит к насыщению?

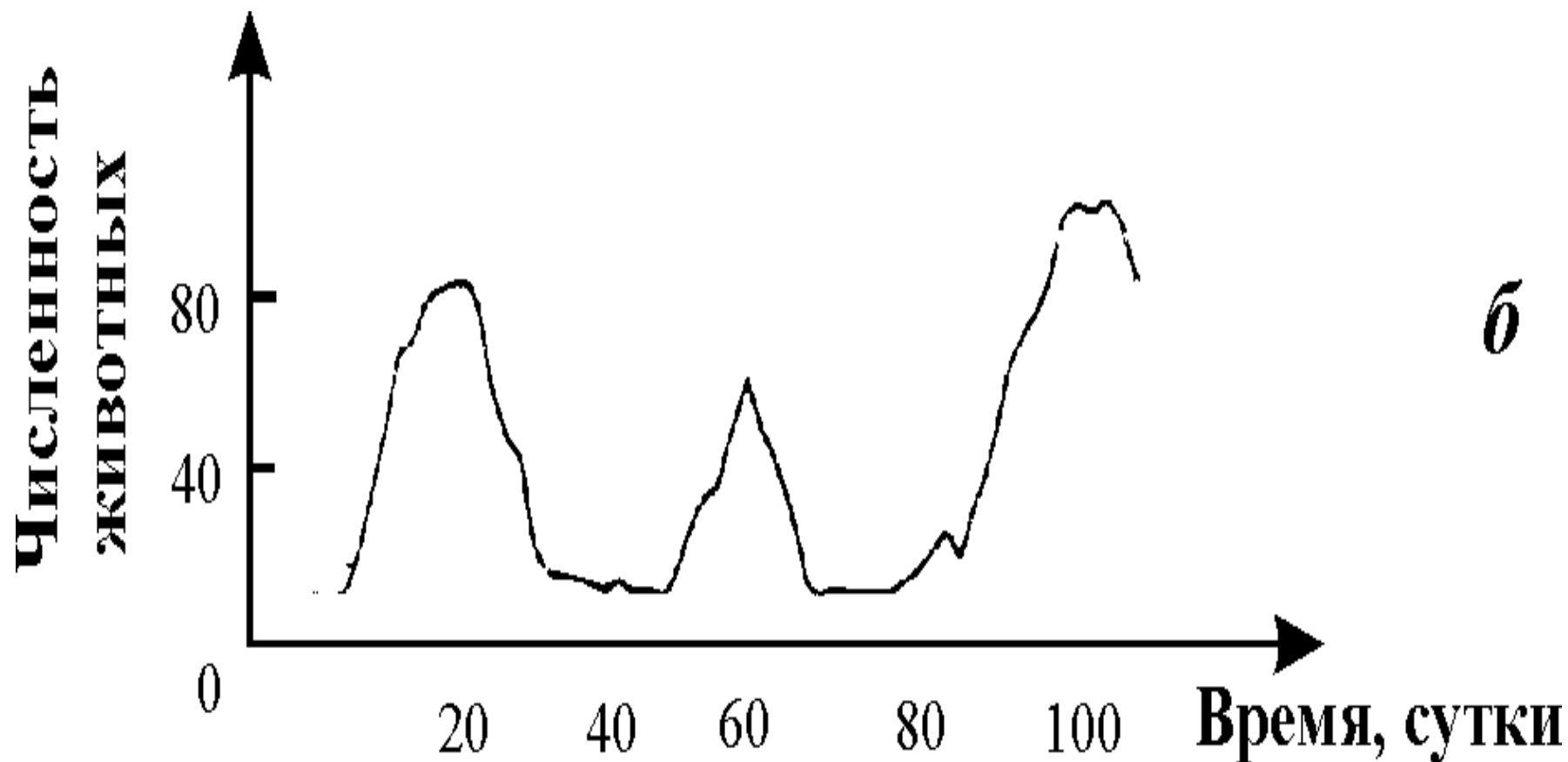
Динамика численности популяции

- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson, 1938*)

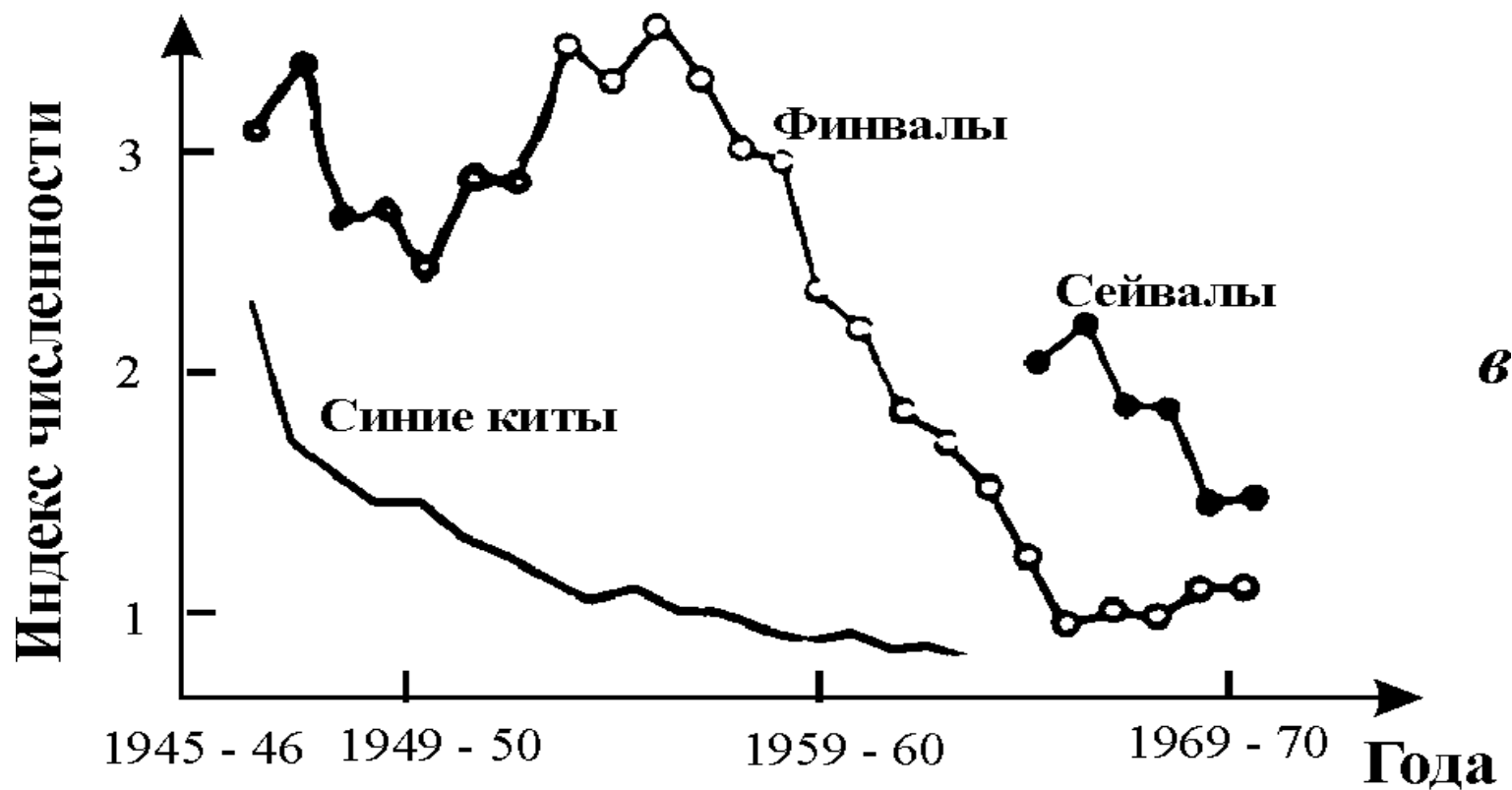


Изменение численности
Daphnia magna (Frall, 1943)

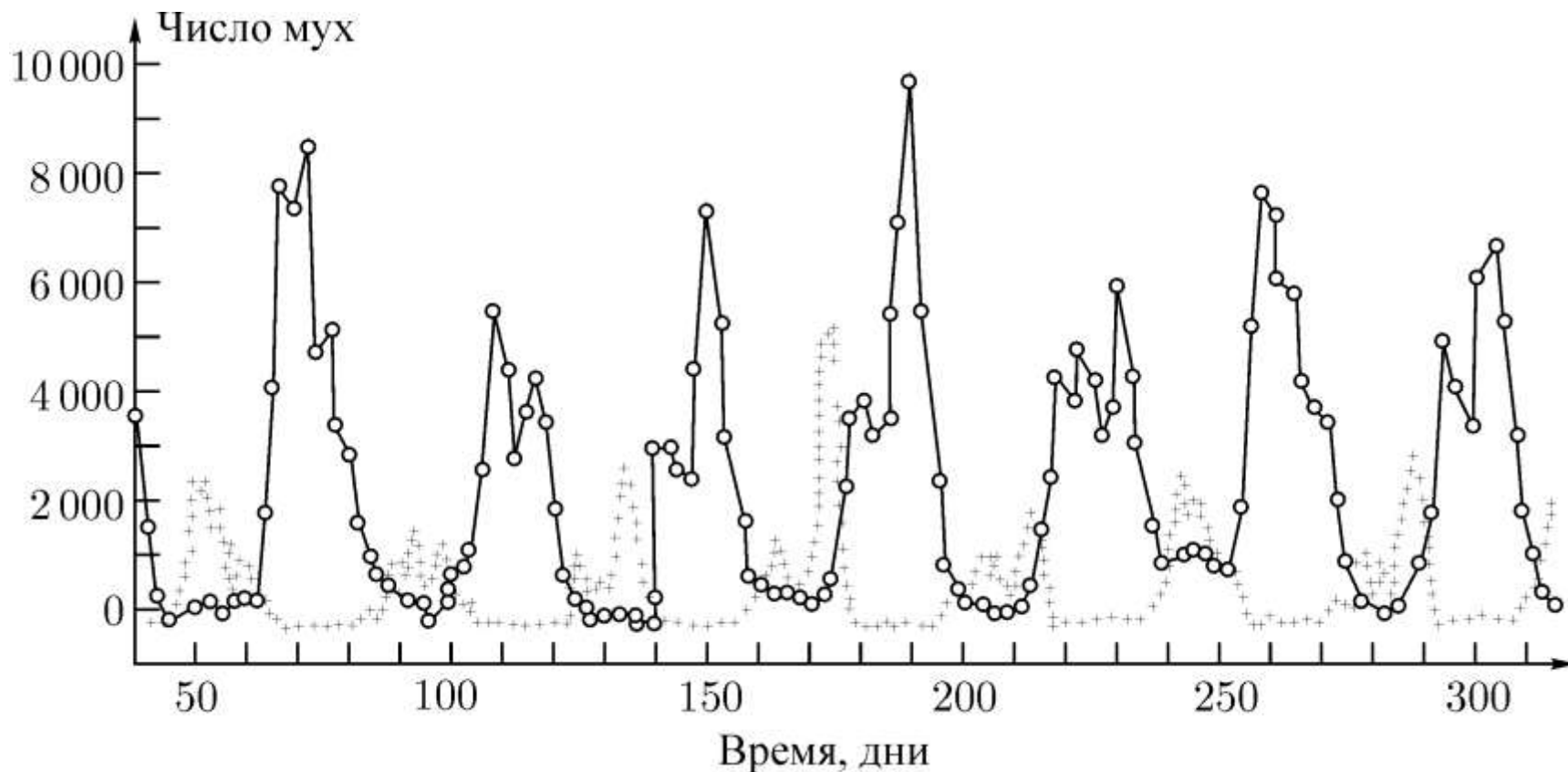


б

Динамика численности трех видов китов в Антарктике
(приведена по изменению «индекса численности» убитых
КИТОВ
на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland*, 1971)



Численность мух *Lucilia* в популяционном ящике (Nicholson, 1954) 1 –
взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день



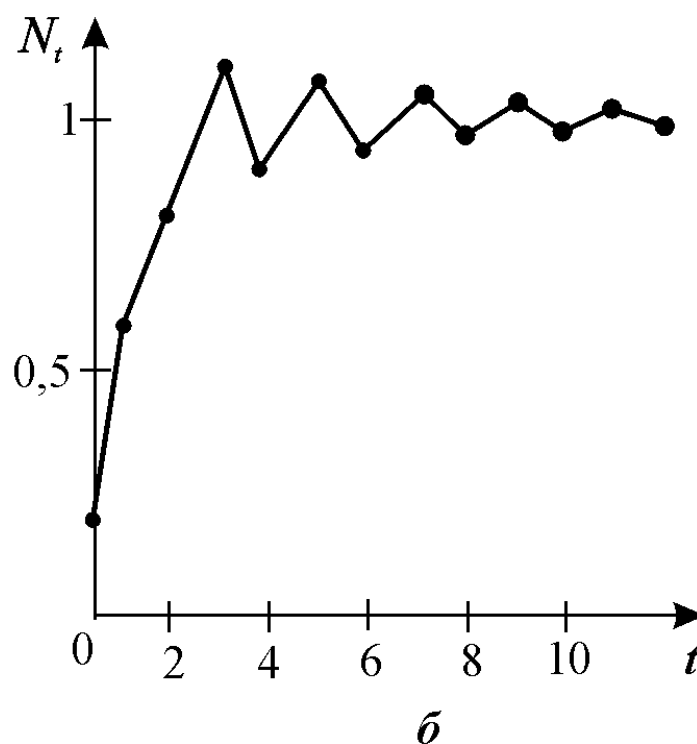
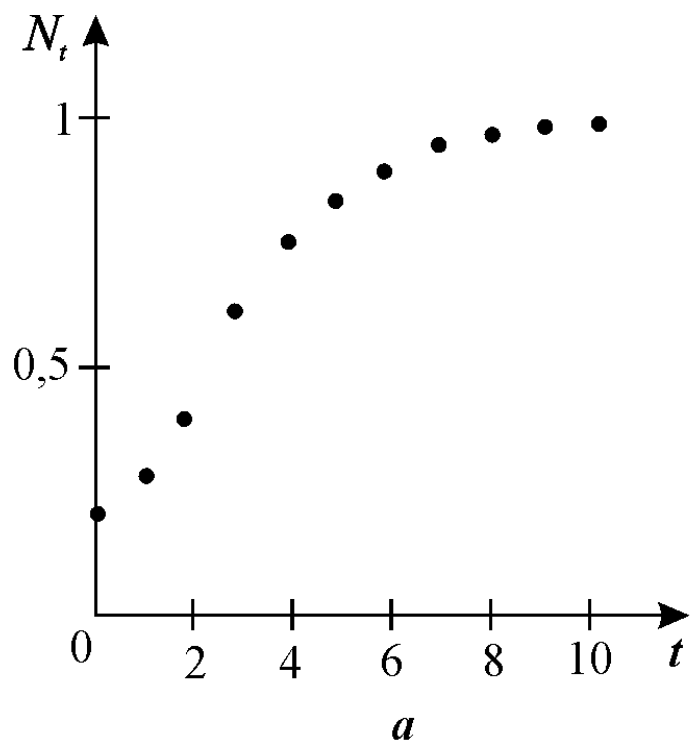
Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Дискретные модели популяций

Монотонный и немонотонный рост
Колебания
хаос

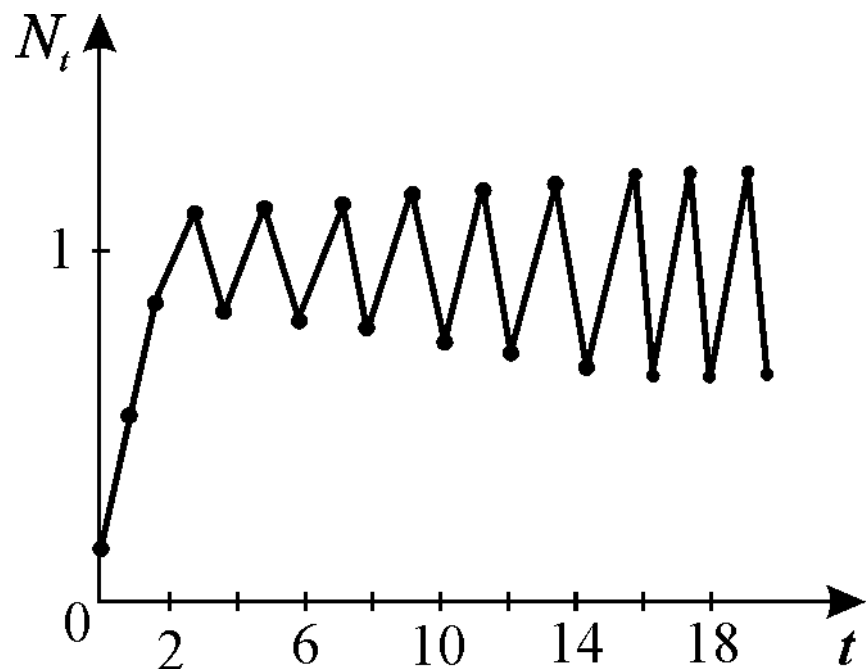
*Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
 решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет собой
 затухающие колебания при $1 < r < 2$.*



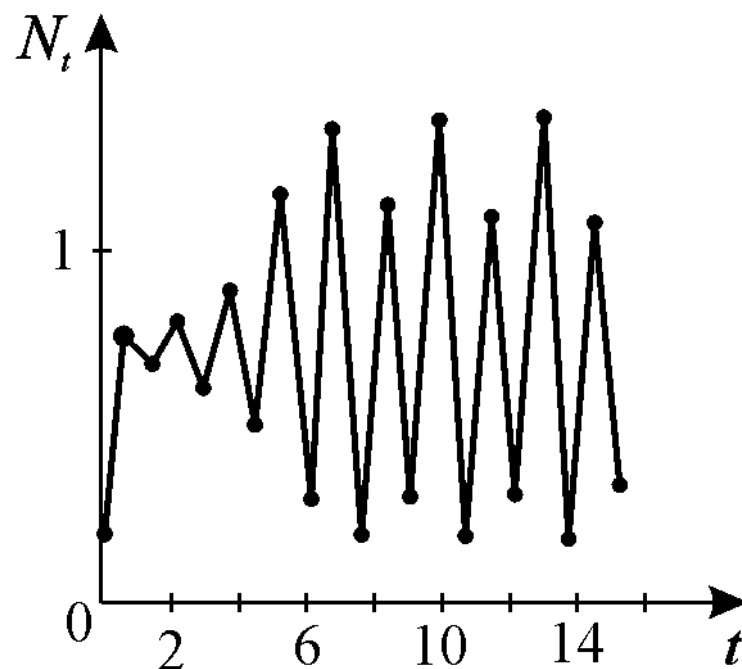
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы

при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$.



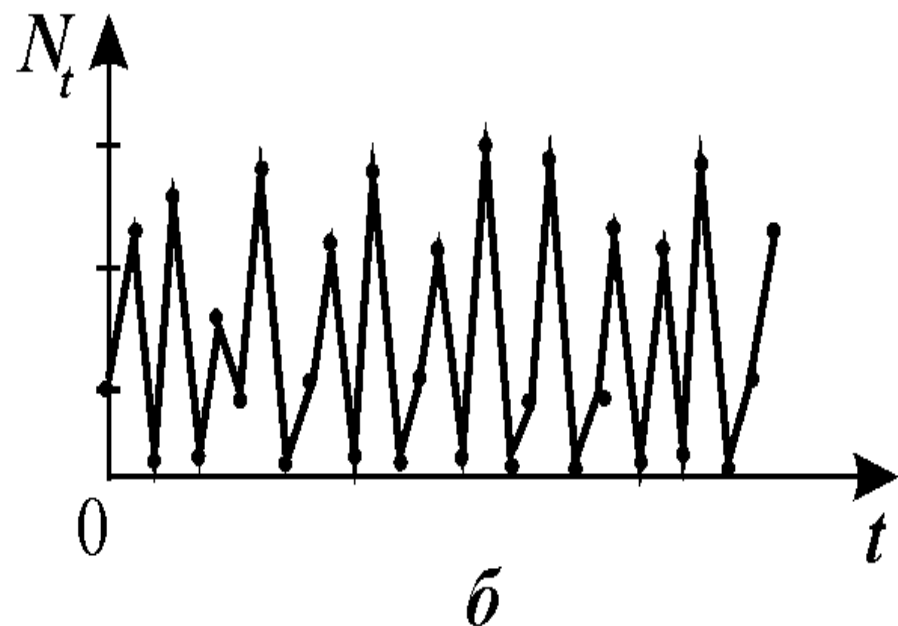
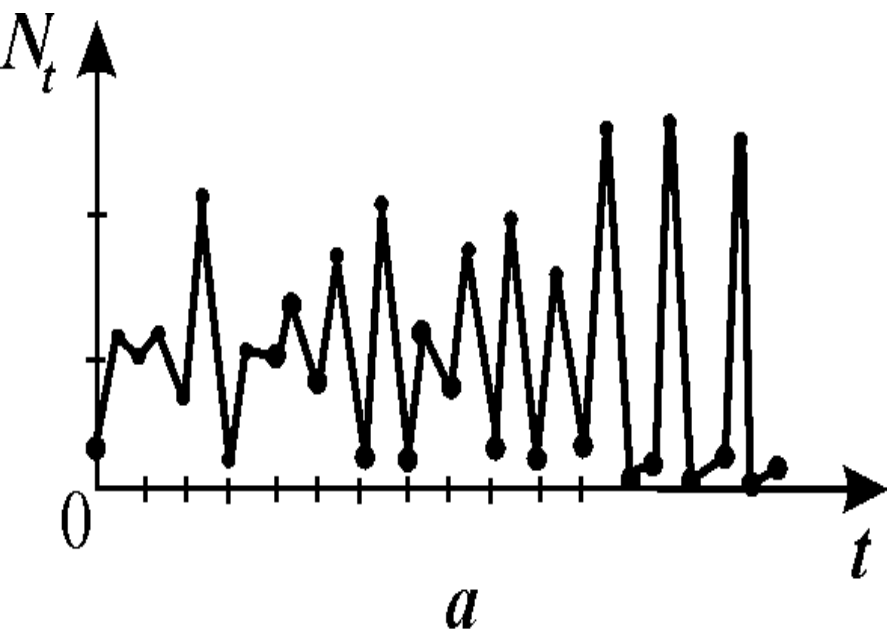
a



b

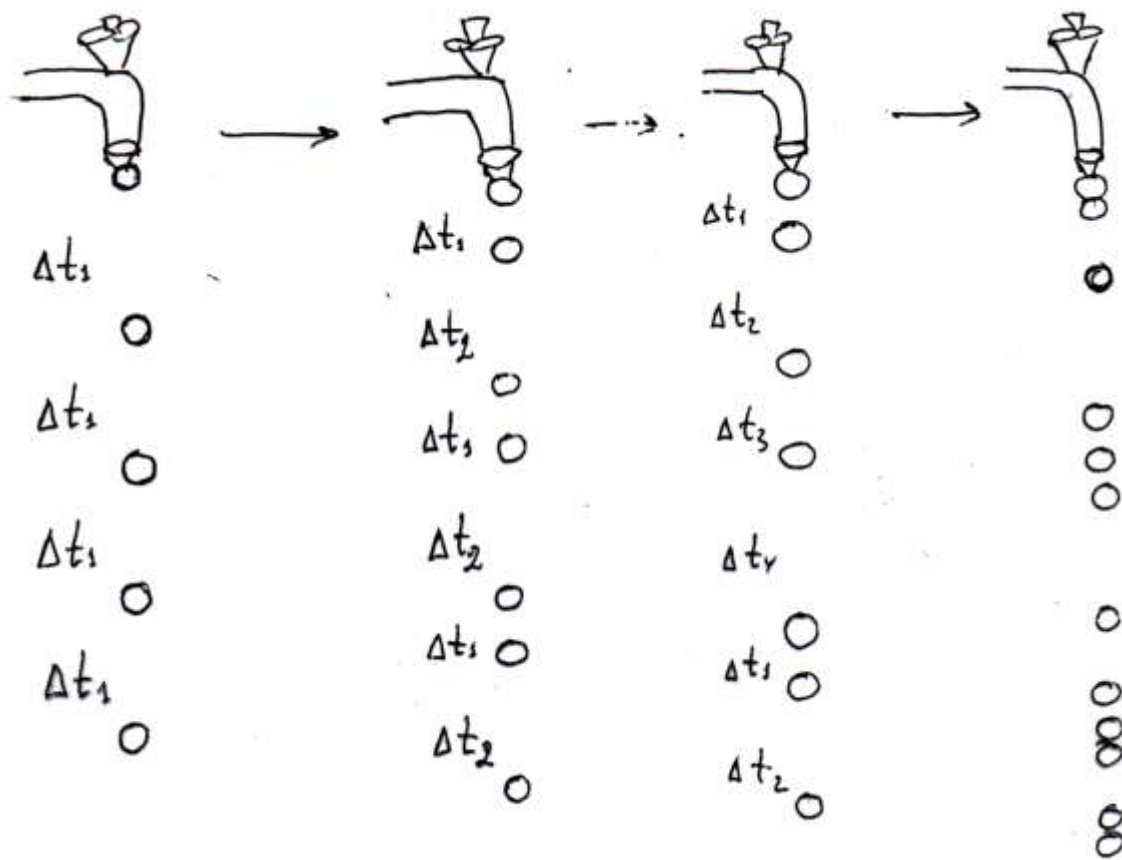
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

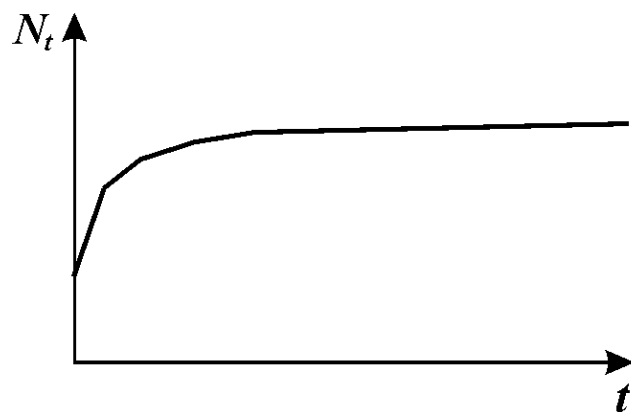
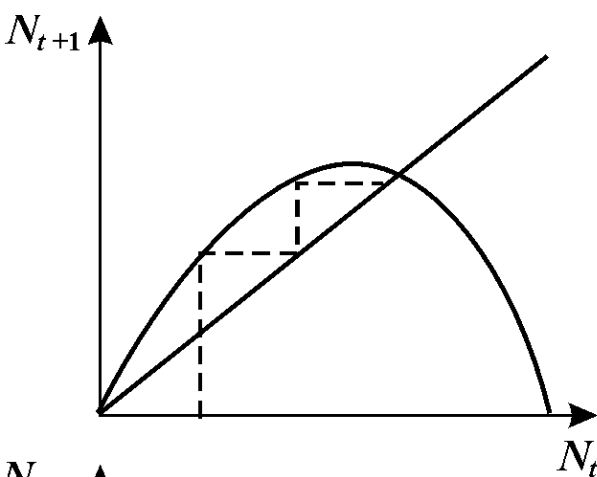
При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий.
 Существуют *трехточечные циклы* и
квазистохастические решения.



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

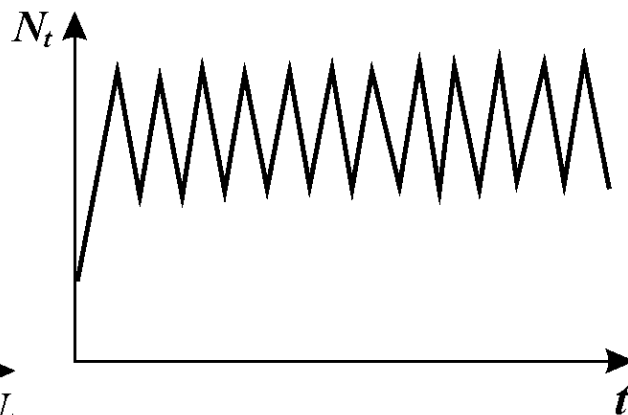
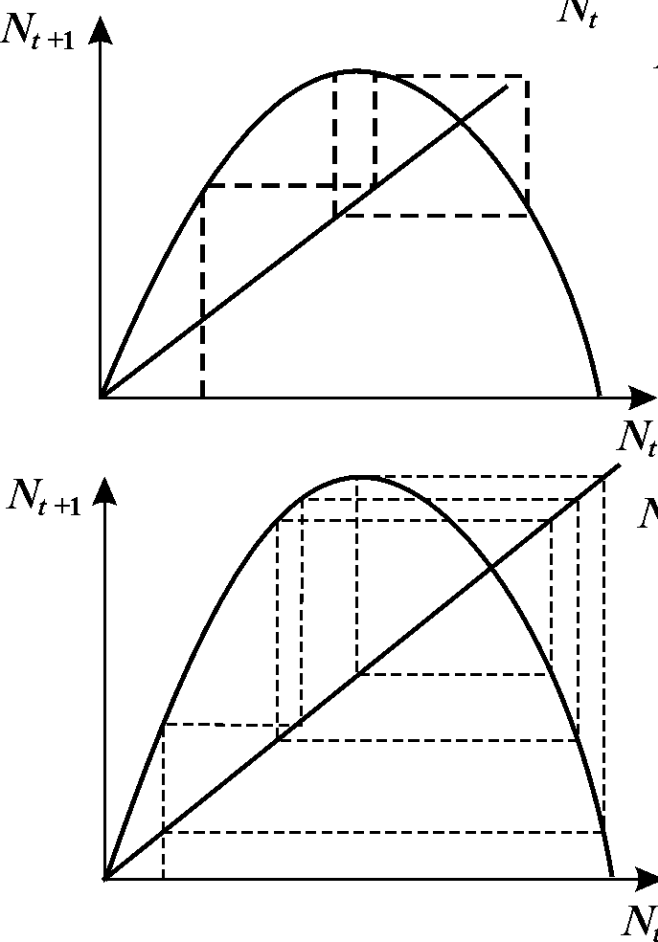
Переход к хаосу через удвоение периода



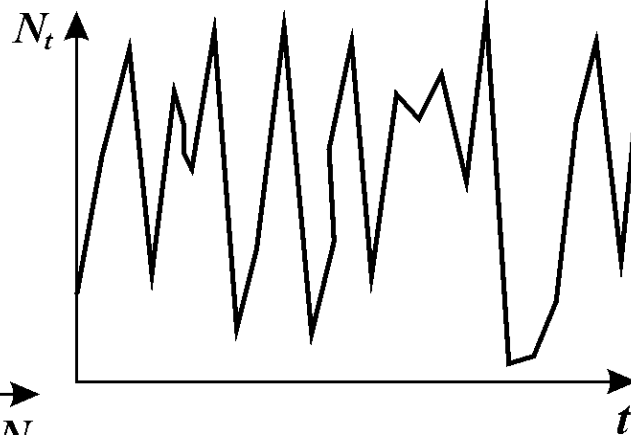
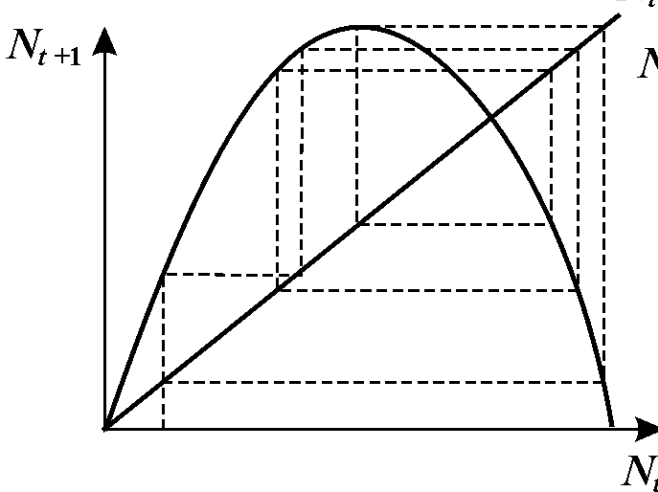


a Квадратичное
отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

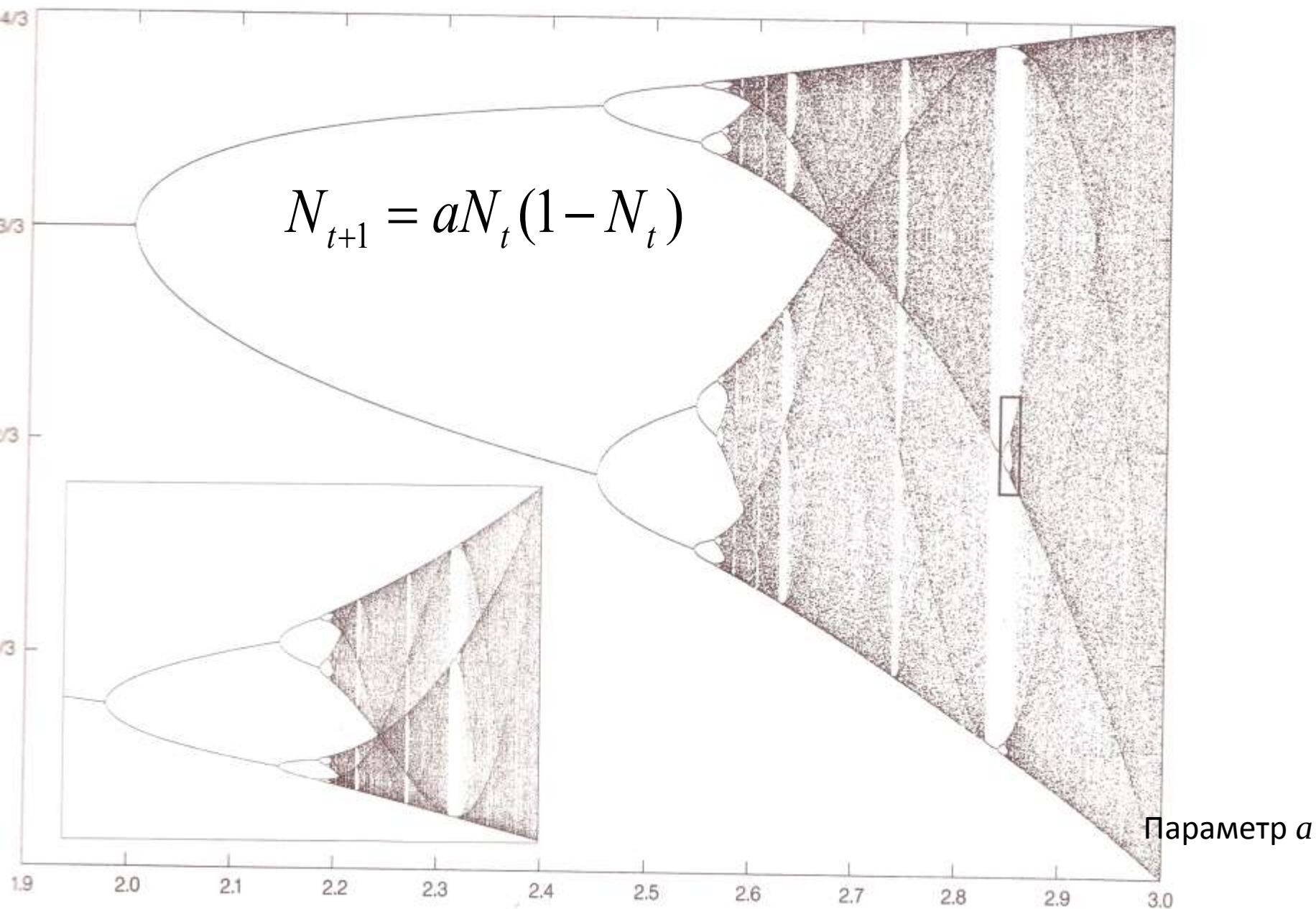


б

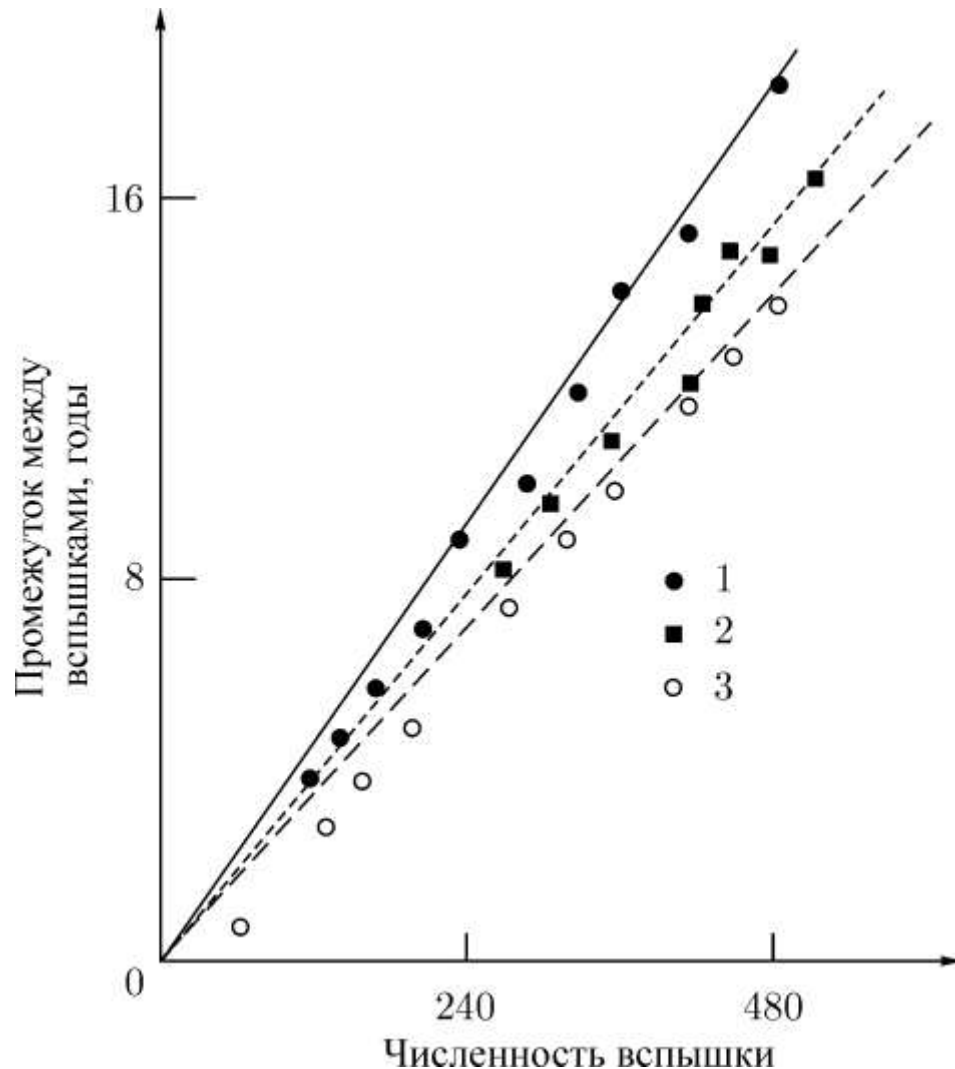


в

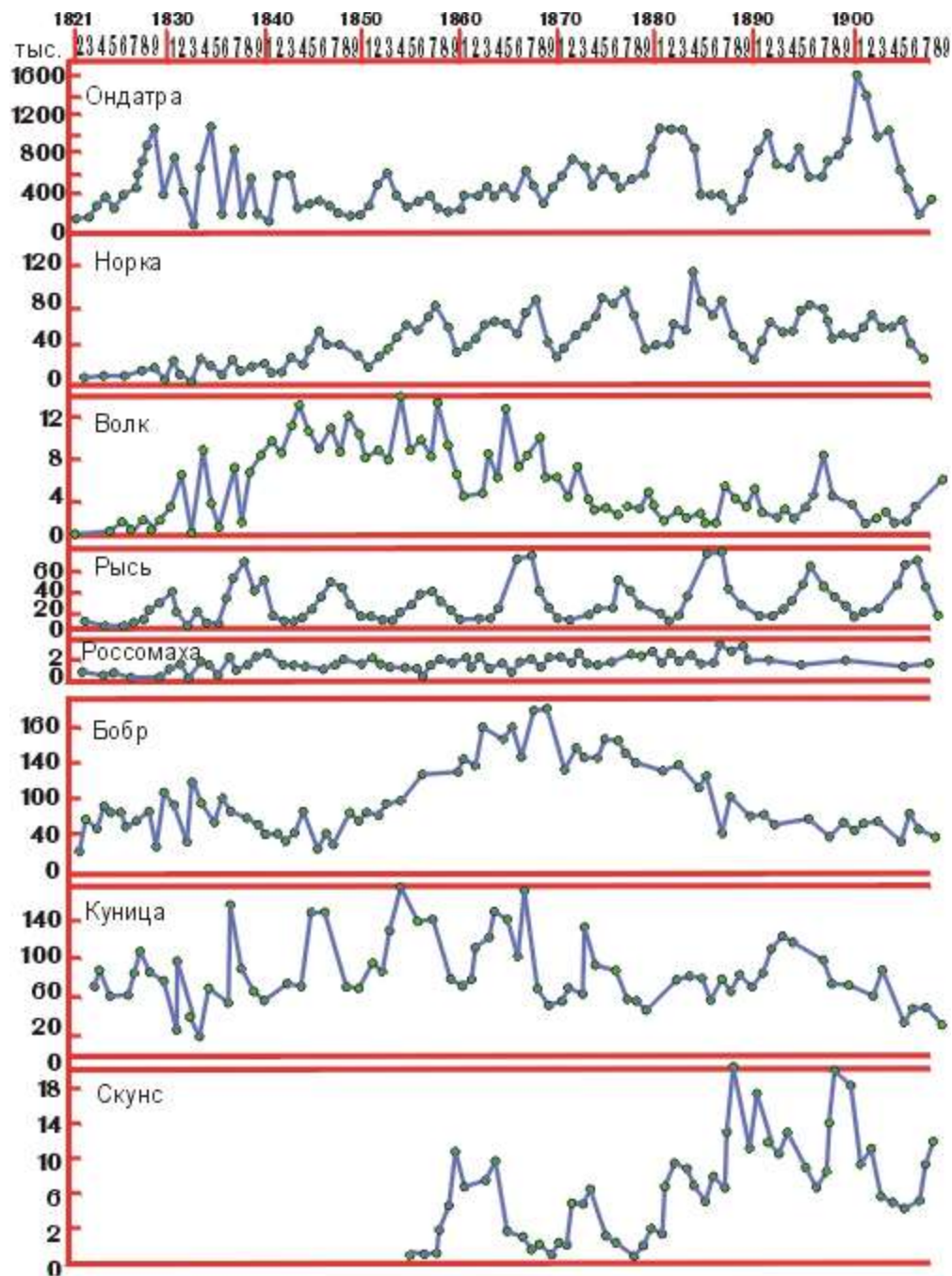
Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода



Если функция $F(N)$ имеет один экстремум и точку перегиба на падающей части, то чем больше амплитуда вспышки, тем длительнее интервал малых численностей популяции



Vandermeer, 1982



Кинетические
кривые
численности
пушных зверей по
данным
компании
Гудзонова залива.
(Сетон-Томсон,
Торонто, 1911)

Задание

Задание 1

Примеры моделей в Вашей науке

Как можно их классифицировать?

Привести примеры базовых и имитационных моделей

Задание 2

Какие задачи из разных областей науки могут быть сформулированы как задача роста популяции ?