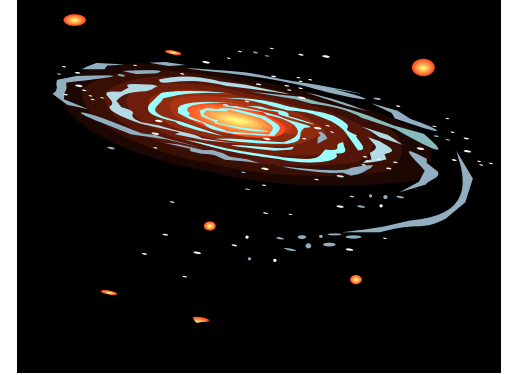
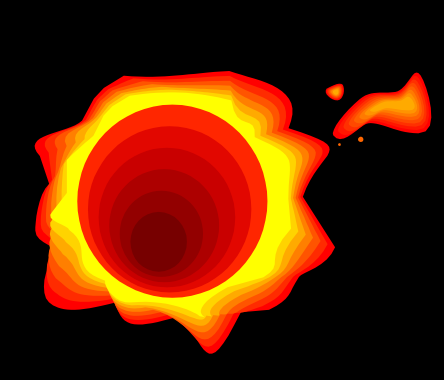




www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

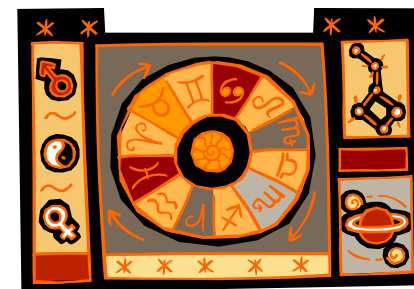
Фазовая плоскость

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского
государственного университета им. М.В.Ломоносова,
к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

E-mail: riznich@biophys.msu.ru



<http://mathbio.ru/mnw>

Схемы роста в терминах системного анализа

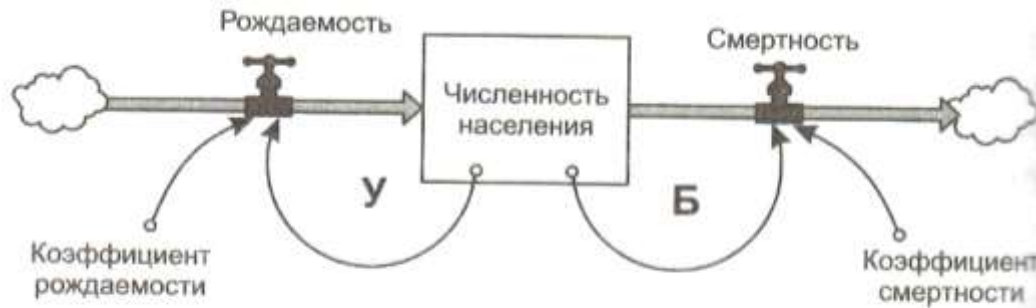


Рис. 21. Численность населения зависит от усиливающего цикла, описывающего рождаемость, и балансирующего цикла, описывающего смертность

Чем больше величина физического капитала (оборудование и заводы) и чем выше эффективность производства (объем производства на единицу капитала), тем больше годовой выход продукции

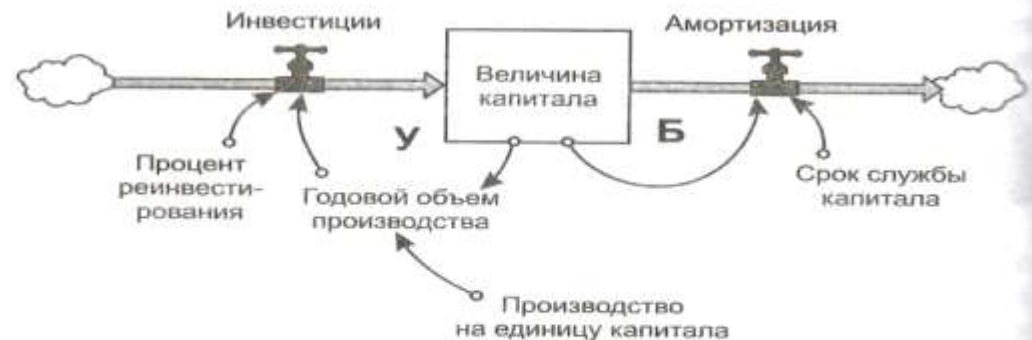


Рис. 27. Как и в структуре с численностью населения, экономический капитал зависит от усиливающего цикла, ответственного за рост (инвестиции в виде доли от годового объема производства), и балансирующего цикла, ответственного за снижение капитала (амортизация)

Динамическая система

- Динамическая система определяется пространством X и заданным на нем однозначным оператором $T(\Delta t)$, зависящим от параметра $\Delta t \geq 0$, так что каждой точке x оператор T ставит в соответствие единственную точку x^* , то есть

$$x^* = T(\Delta t)x$$

- При этом предполагается, что оператор $T(\Delta t)$ при любых допустимых $\Delta t_1 \geq 0$ и $\Delta t_2 \geq 0$ удовлетворяет соотношению
- $T(\Delta t_2) + T(\Delta t_1) = T(\Delta t_1 + \Delta t_2)$

Пространство состояний

X – фазовое пространство

- X – пространство возможных состояний рассматриваемой системы
- обычно x – многомерный вектор с компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Описание x называется **состоянием**, или **фазовой точкой** (изображающей, представляющей точкой)

Система дифф. ур-ний 1-го порядка – динамическая система

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t} \frac{\tau(\Delta t)}{\Delta t} = L,$$

то состояние x как функция t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Lx$$

Изменение состояния динамической системы может быть представлено системой дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Агентное моделирование

«Агентный» (объектный, атомистический, корпускулярный) метод моделирования предполагает выводить свойства сложных систем из свойств и способов взаимодействия составляющих эти системы «агентов» или «атомов» - простейших объектов, составляющих эту систему.

Вычислительный эксперимент - simulation

Улей	Каравай	Пруд
Ящик	Блок	Змея
Баржа	Лодка	Корабль
Длинная баржа	Длинная лодка	Длинный корабль

- | Номер хода | | |
|---|---|---------------------------------------|
| 0 | 1 | 2 |
|  |  | Погибает |
|  |  | Погибает |
|  |  | Погибает |
|  |  | Блок
устойчивая
конфигурация |
|  |  | Мигалка
период равен
двум ходам |

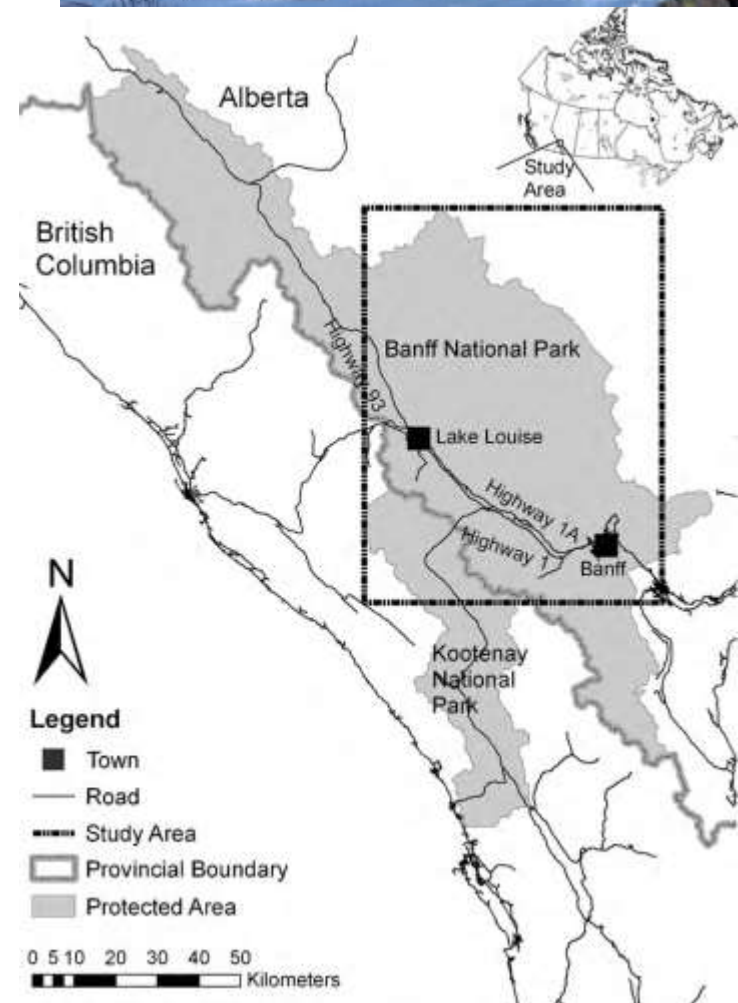
How humans shape wolf behavior in Banff and Kootenay National Parks, Canada

Marco Musiania, Sk. Morshed Anwarb, Gregory J. McDermidc, Mark Hebblewhited, Danielle J. Marceaub,*

В модели рассматривается пространственная сетка. Поведение волка в каждой клетке определяется характером состояния соседних 8 клеток и некоторыми дальнodelствующими факторами.

Волки охотятся за оленями. Перемещаются частично случайно в зависимости от ландшафта (friction map), частично направленно, приняв соответствующее решение (cognitive agents)

Убивают оленя – отдыхают, кормят детей в логове. Избегают медведей, людей и машин.



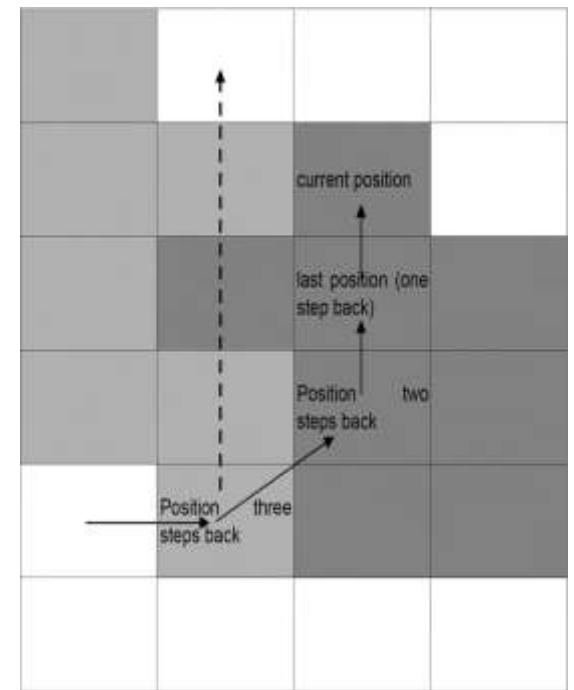
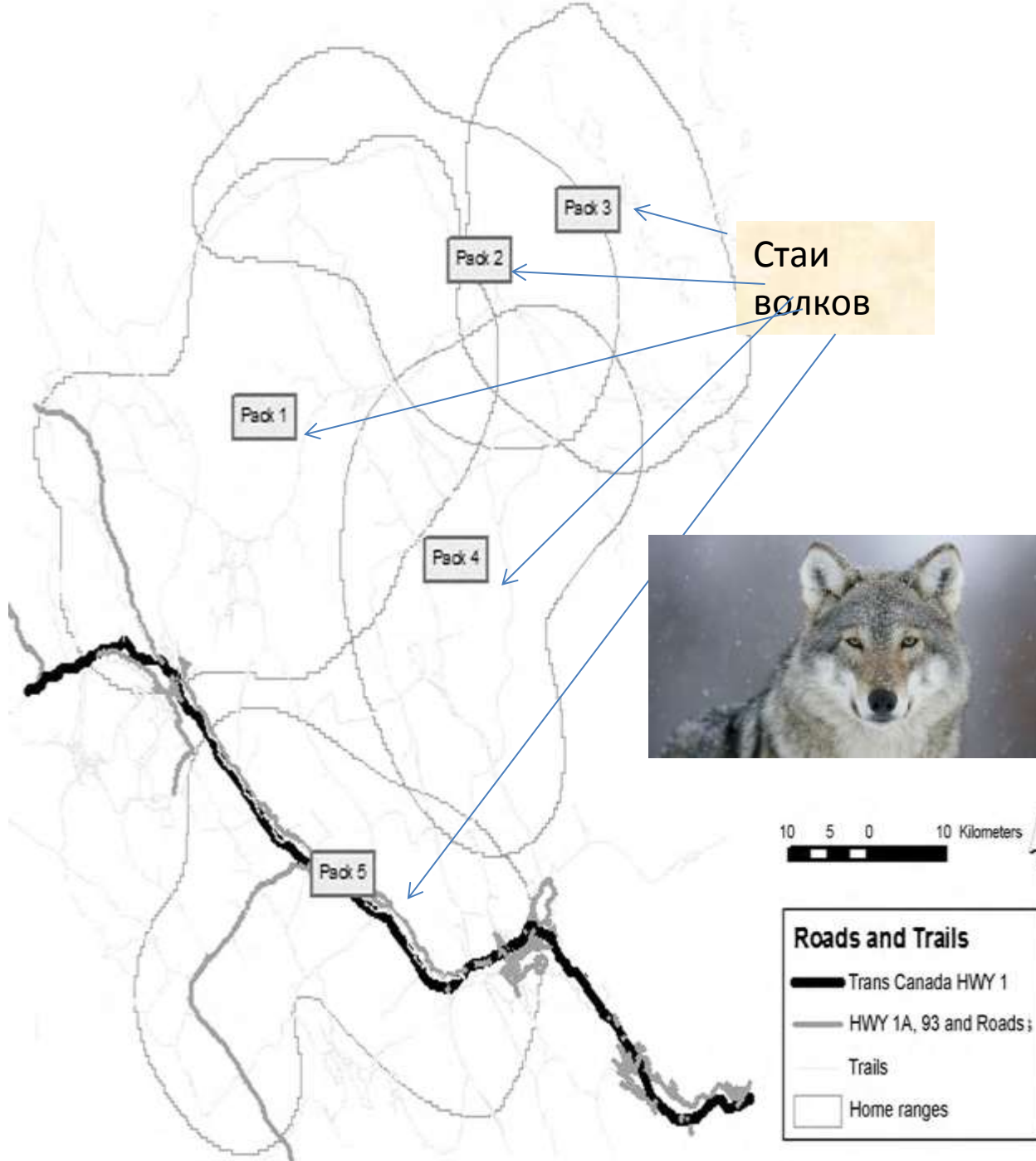


Схема перемещения по местной

Weighting of habitat variables used to build a friction map of wolf Movement

Habitat variables Eigenvector weights

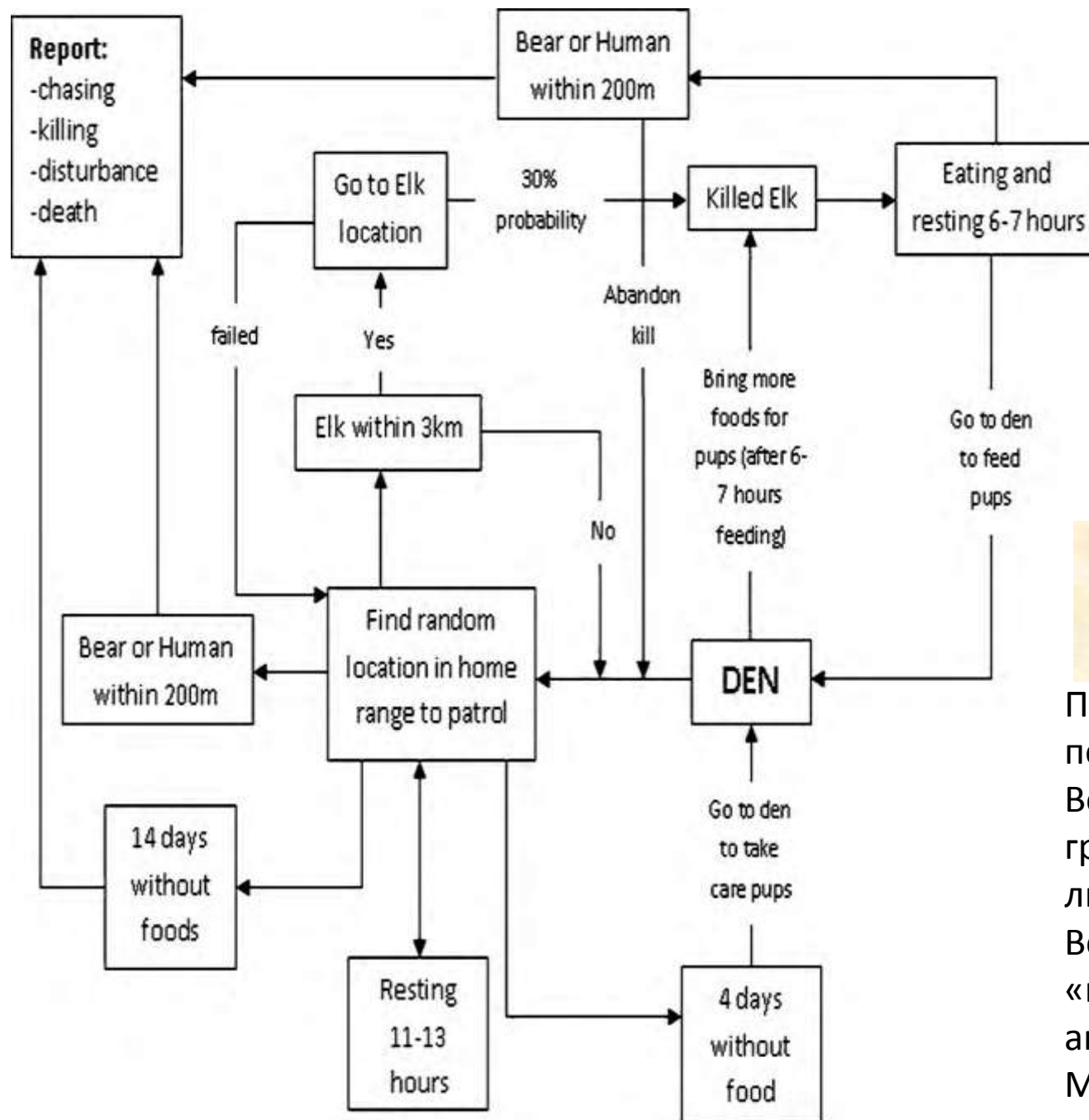
Elevation высота 53.1

Aspect тип ландшафта 17.9

Land cover 13.7

Slope наклон 15.3

Total итого 100.0

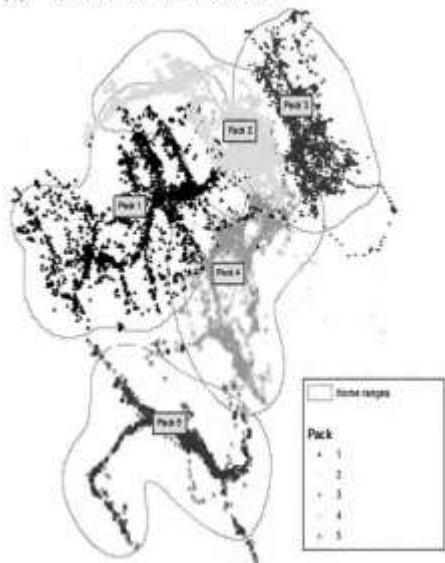


Концептуальная модель принятия решений волком при перемещении по местности

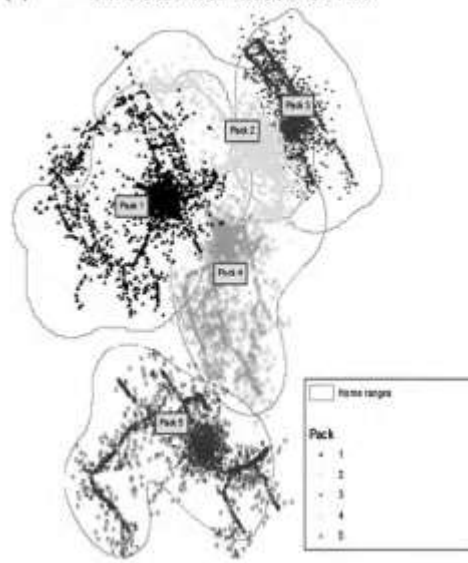
Пространственная сетка – 100 кв.м
Шаг по времени – 1 мин

Подмодели перемещения Волков, медведей гризли, оленей и людей
Волки считаются «когнитивными агентами»- Могут принимать решения.

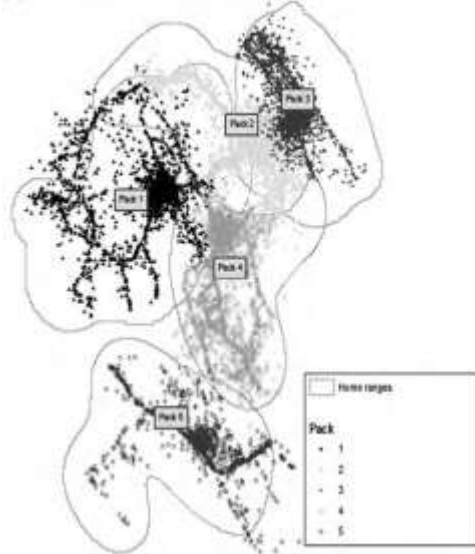
(a) Observed wolf locations



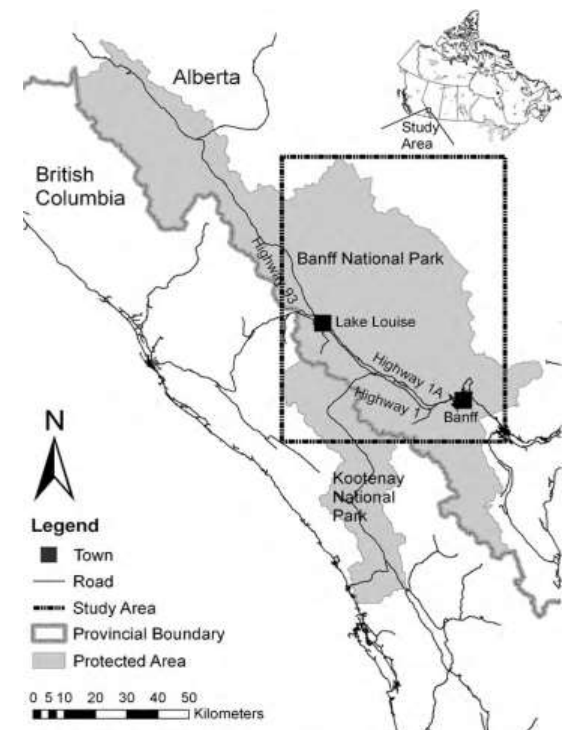
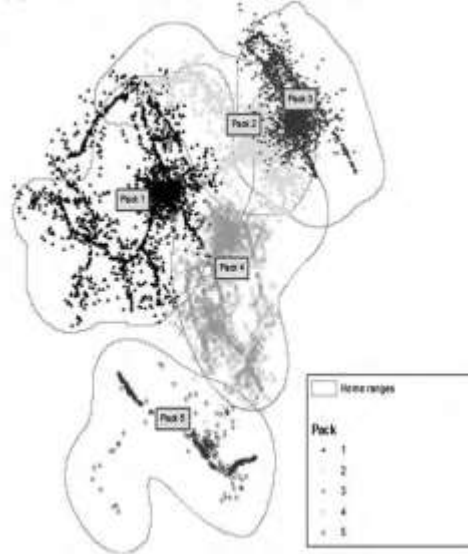
(b) Simulated wolf locations H1X



(c) Simulated wolf locations H5X



(d) Simulated wolf locations H10X



Wolf locations within the study area obtained from: (a) wolf GPS radiocollar points acquired from 2002 to 2004, (b) simulated wolf locations with estimated actual human presence (H1X), (c) (H5X), (H10X).

Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Динамическая система

- Динамическая система определяется пространством X и заданным на нем однозначным оператором $T(\Delta t)$, зависящим от параметра $\Delta t \geq 0$, так что каждой точке x оператор T ставит в соответствие единственную точку x^* , то есть

$$x^* = T(\Delta t)x$$

- При этом предполагается, что оператор $T(\Delta t)$ при любых допустимых $\Delta t_1 \geq 0$ и $\Delta t_2 \geq 0$ удовлетворяет соотношению
- $T(\Delta t_2) + T(\Delta t_1) = T(\Delta t_1 + \Delta t_2)$

Пространство состояний

X – фазовое пространство

- X – пространство возможных состояний рассматриваемой системы
- обычно x – многомерный вектор с компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Описание x называется **состоянием**, или **фазовой точкой** (изображающей, представляющей точкой)

Система дифф. ур-ний 1-го порядка – динамическая система

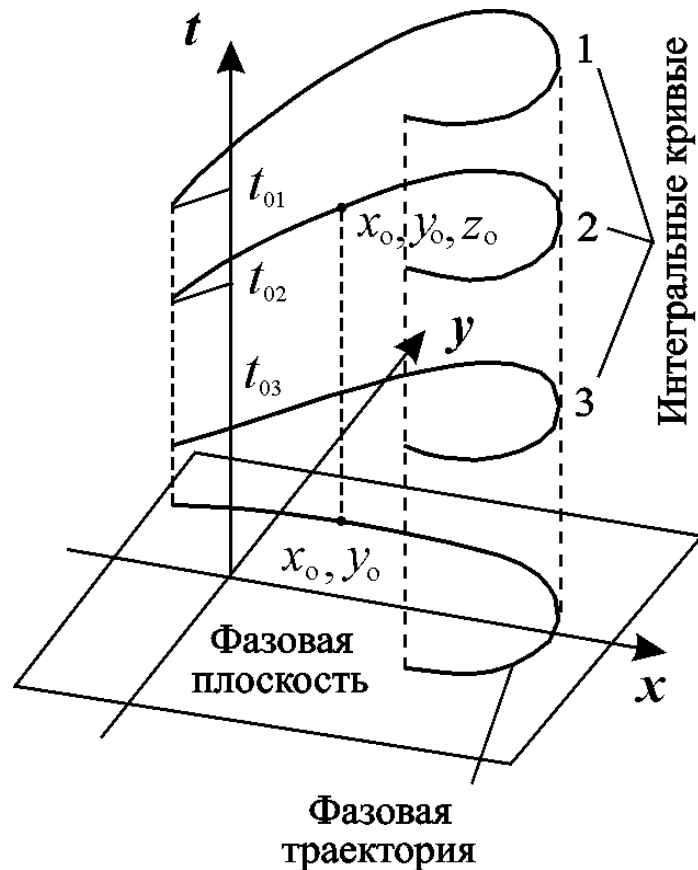
Если существует предел при $\Delta t \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta t)}{\Delta t} = L$,

то состояние x как функция t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Lx$$

Изменение состояния динамической системы может быть представлено системой дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Траектории системы в пространстве (x, y, t)



$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$



Жюль Анри Пуанкаре
(Jules Henri Poincaré)
[1854-1912](#)

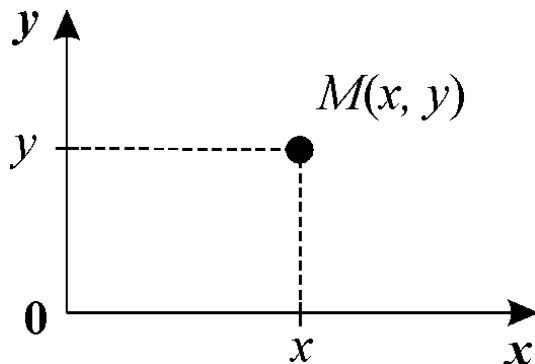
Фазовый портрет

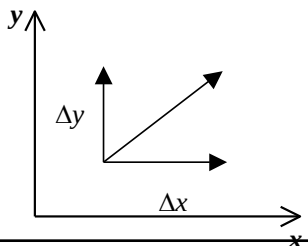
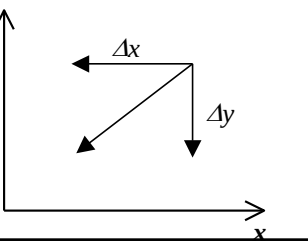
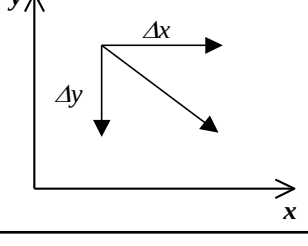
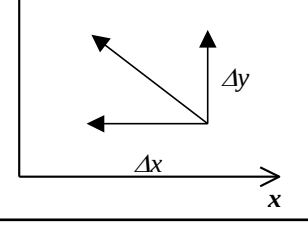
$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Уравнение фазовых траекторий



$P(x, y) > 0, Q(x, y) > 0$	
$P(x, y) < 0, Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) > 0, Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) < 0, Q(x, y) > 0$	

ИЗОКЛИНЫ

Уравнение изоклин

$$A = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

В стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}$$

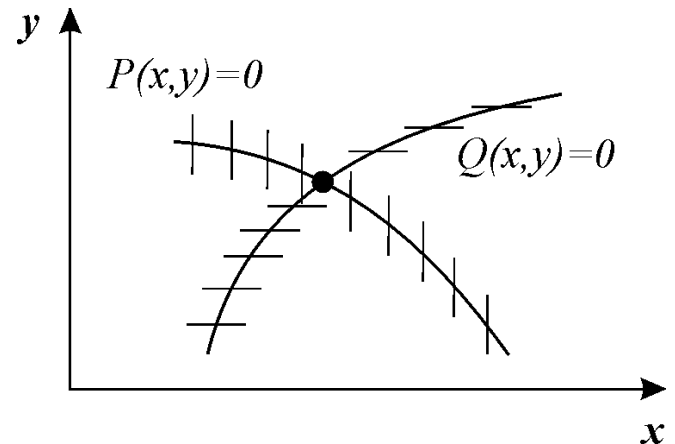
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

изоклина
горизонтальных
касательных

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad P(x, y) = 0$$

Изоклина
вертикальных
касательных



В химии и биологии, политологии, социологии

- Фазовые переменные
- – концентрации веществ
- - численности видов животных
- Численности коллективов
- Численность населения стран

Сражающиеся армии



Переменные -
численности:

x , y

Параметры –
эффективности:
 a , b

Раковорская битва (1267)

(Раковор – древнерусское название; Везенбург - немецкое) между рыцарями Тевтонского ордена и войском Северо-запада и Северо-востока Руси.

Численности сражающихся армий

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{by},$$

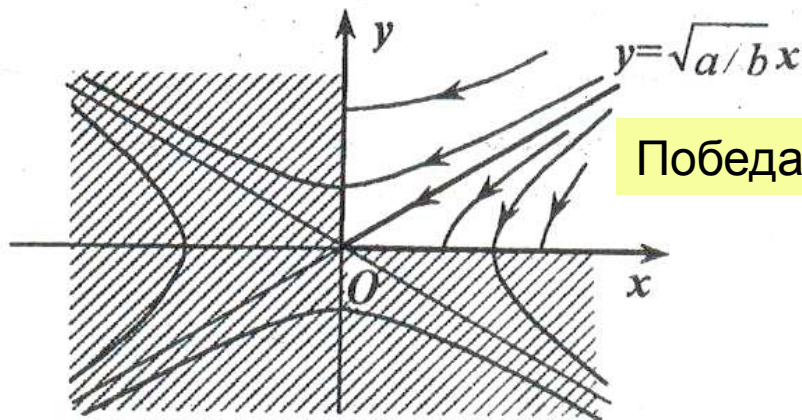
$$ax dx = by dy,$$

$$ax^2 - by^2 = ax^2(0) - by^2(0) = Const;$$

Ю.И.Неймарк.
Математические
модели в
естествознании и
технике

$$y_0 > \sqrt{\frac{a}{b}} x_0$$

Победа y



$$y_0 < \sqrt{\frac{a}{b}} x_0$$

Победа x

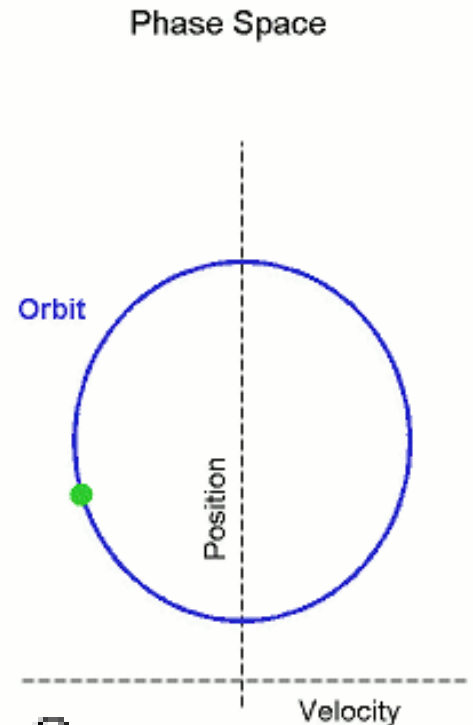
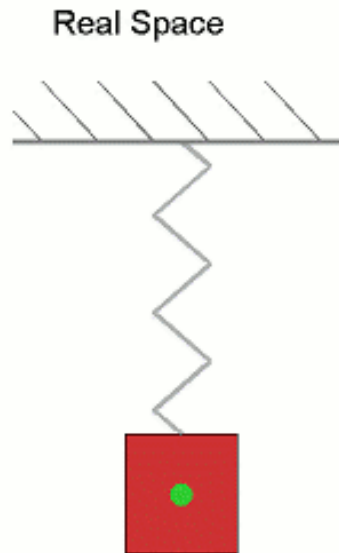
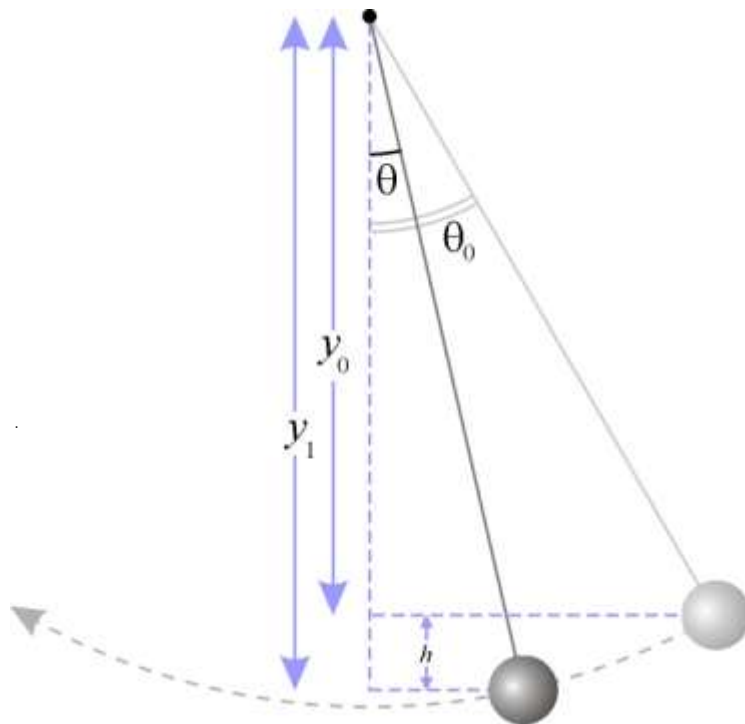
Рис. 1.19. Фазовый портрет
динамики численностей
«сражающихся армий»

Чтобы победила армия, начальная численность кот. в 2 раза меньше, нужно, чтобы ее «эффективность» была в 4 раза больше

Математики! Объясните, почему фазовые траектории имеют такой вид.

Рассмотреть более сложную модель сражения

Гармонический осциллятор



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Физикам предлагается рассказать про гармонический осциллятор. Написать модель из двух уравнений (для положения и скорости) и сделать анализ фазового портрета. Рассмотреть трение. Моделью каких реальных физических систем может служить гармонический осциллятор?

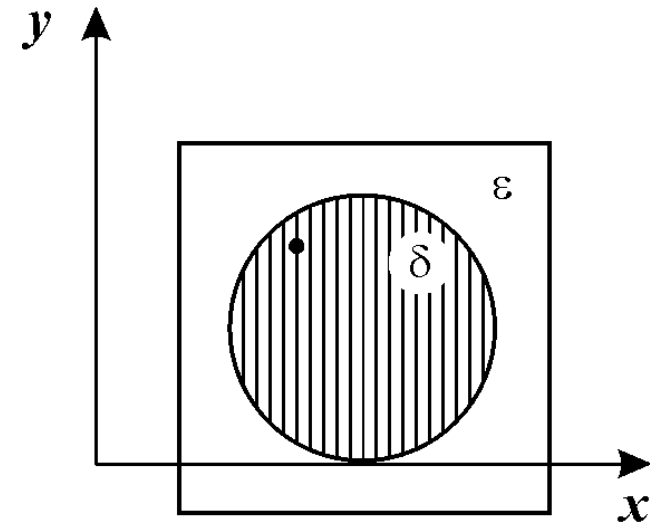
Фазовая плоскость

Качественное исследование

Анализ устойчивости
стационарного состояния
системы двух автономных
дифференциальных
уравнений

Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ , никогда не достигнет границы ε .



Устойчивость стационарного состояния

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$



Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович ([1857](#) –1918) – выдающийся русский [математик](#), создал [теорию устойчивости](#) состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области [дифференциальных уравнений](#), [гидродинамики](#), [теории вероятностей](#)

Линеаризация системы общего вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

Разлагаем правые
части в ряд Тейлора,
оставляем первые
члены

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

Исследование устойчивости стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Ищем решение в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

Нетривиальные решения существуют, если

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

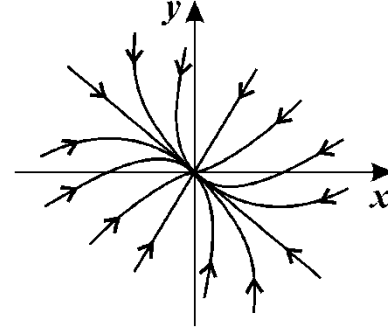
Характеристический определитель

Типы поведения фазовых траекторий вблизи стационарного состояния

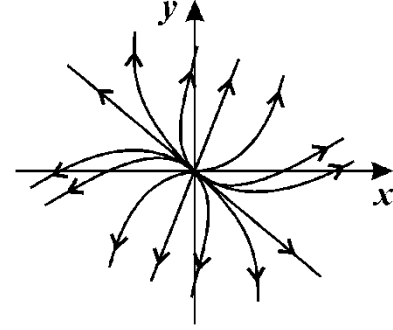
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

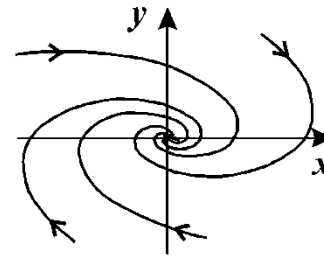
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



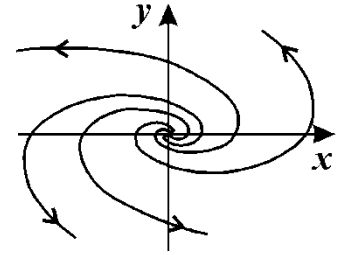
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



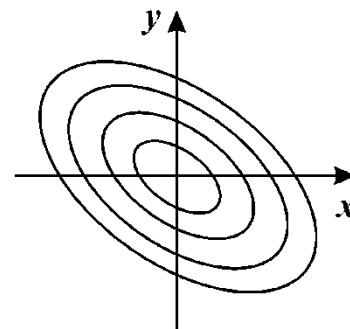
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительные)



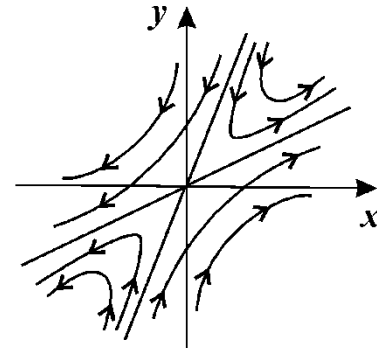
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
 $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Если *оба* корня имеют **отрицательную** действительную часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия устойчиво*;

- если *хотя бы один* корень имеет **положительную** действительную часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия неустойчиво*.
- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю, а другой отрицателен*, то уравнения первого приближения *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо рассматривать члены *более высокого порядка малости* в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений.

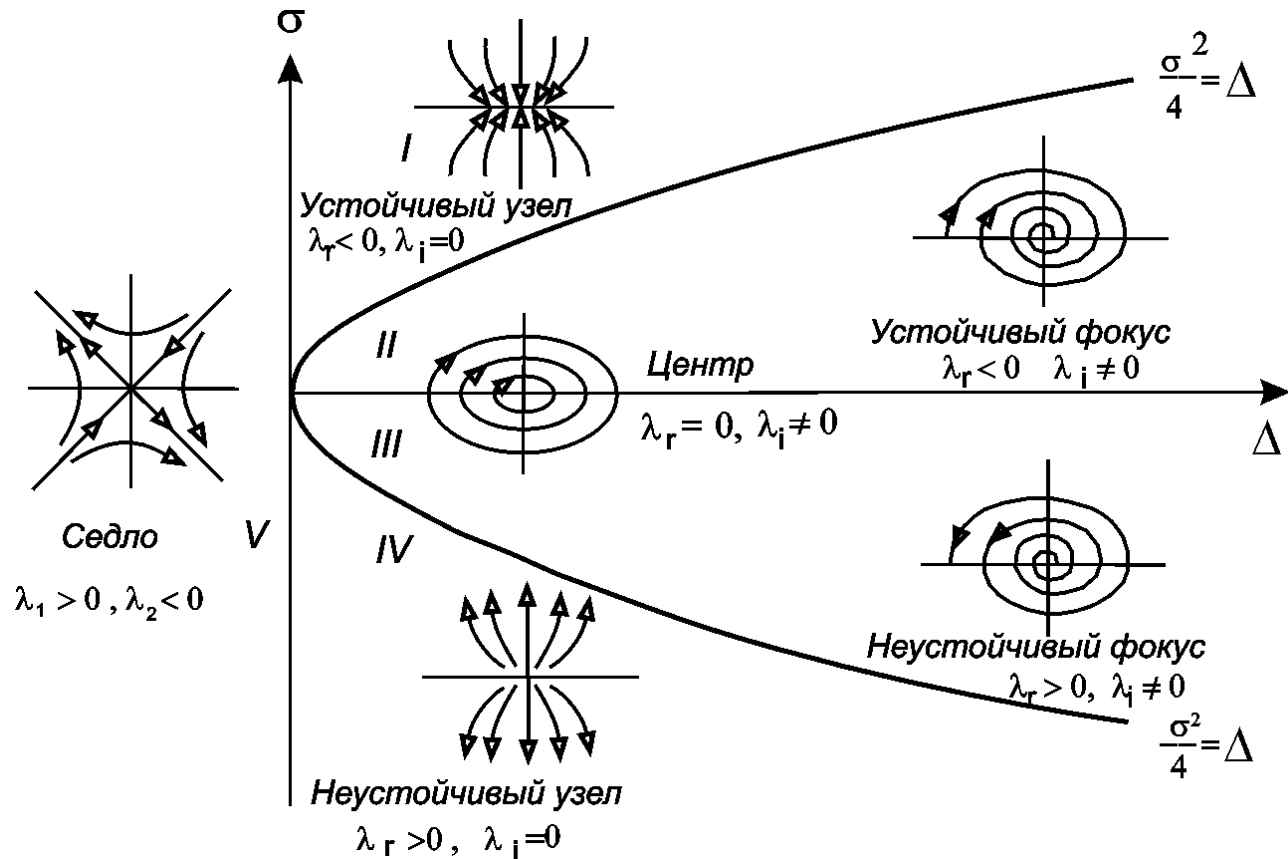
Бифуркационная диаграмма

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

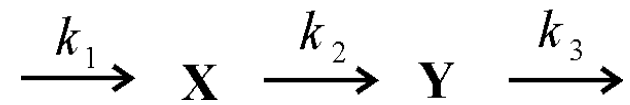
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линейные химические реакции. Фазовый портрет



$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2x - k_3y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2x - k_3y}{k_1 - k_2x}$$

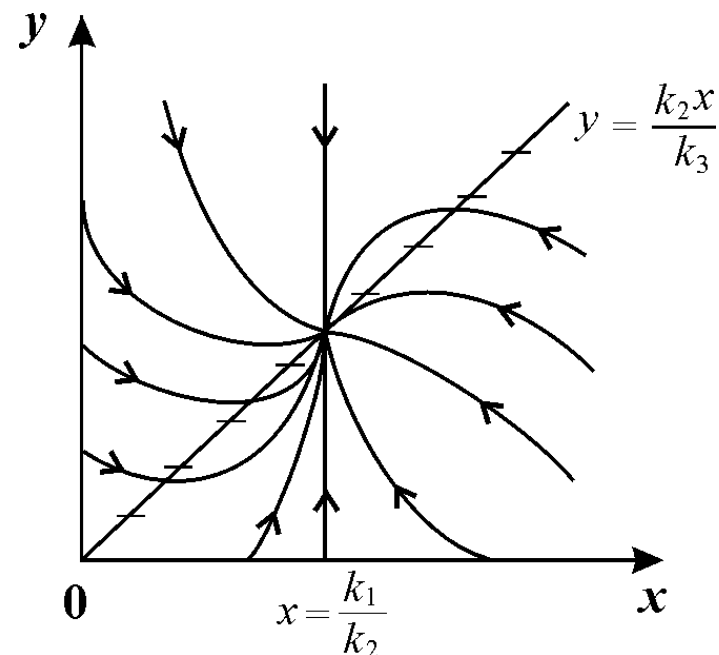
Изоклина горизонтальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = 0, y = \frac{k_2x}{k_3}.$$

Изоклина вертикальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = \infty, x = \frac{k_1}{k_2}.$$

под каким углом пересекаются координатные оси интегральными кривыми.



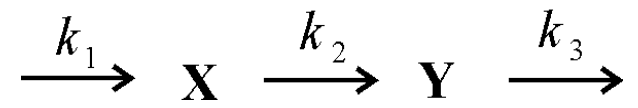
Если $x = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_3}{k_1} y$$

Если $y=0$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2x}{k_1 - k_2x}$$

Линейные химические реакции. Устойчивость стац. состояния



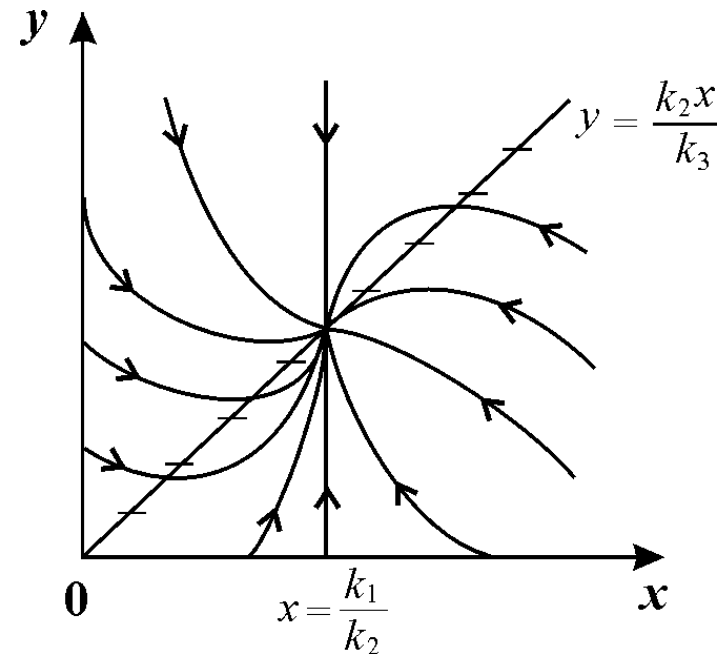
$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$

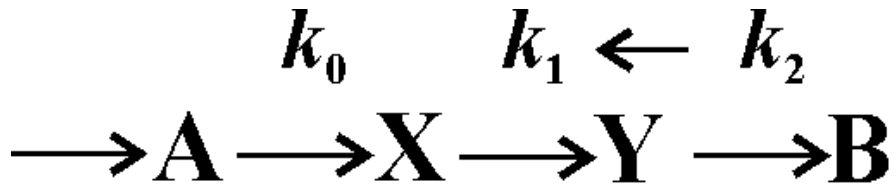
$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -k_2, \quad \lambda_2 = -k_3.$$



Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 xy - k_2 y, \\ \frac{dB}{dt} &= k_2 y.\end{aligned}$$



Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы

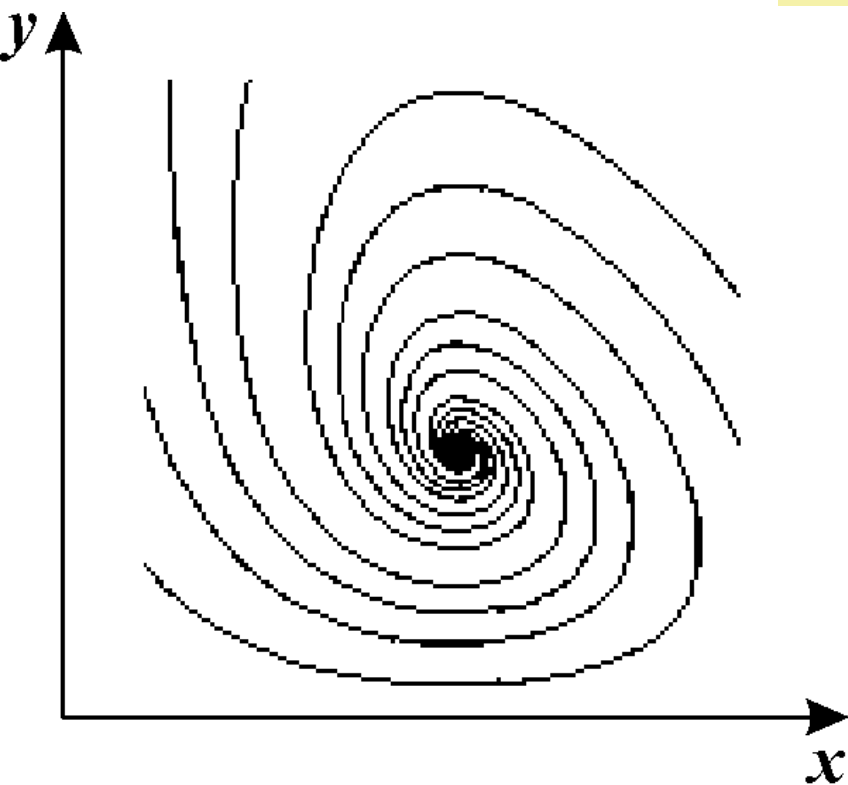
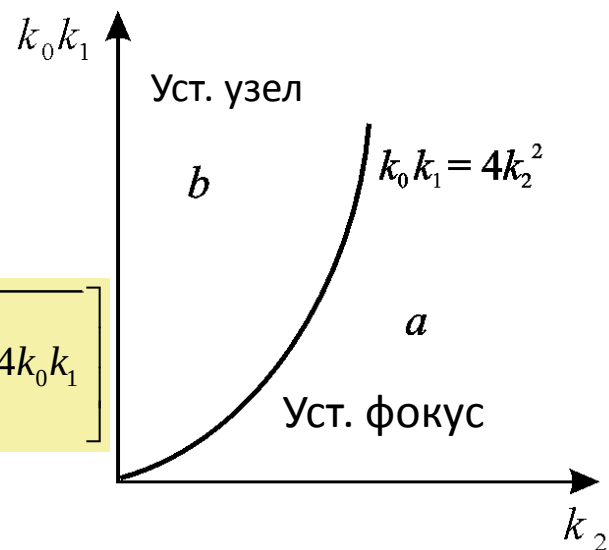
Лотки

a – устойчивый фокус,

b – устойчивый узел.

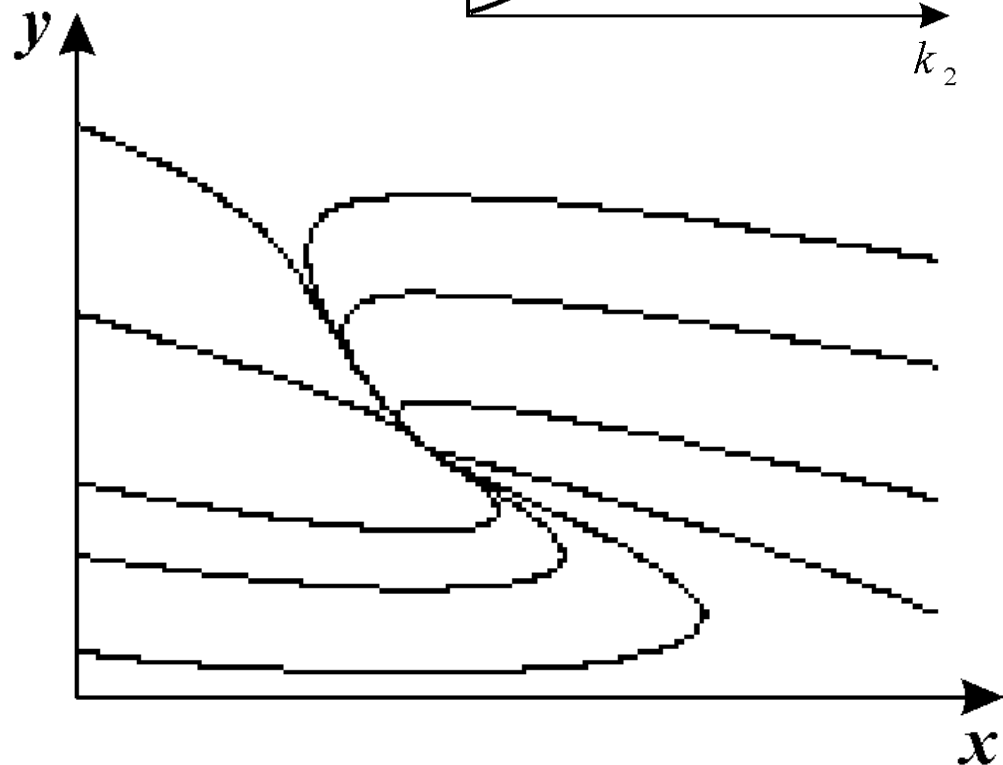
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 xy - k_2 y.\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2} \right)^2 - 4k_0 k_1} \right]$$



a

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



b

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

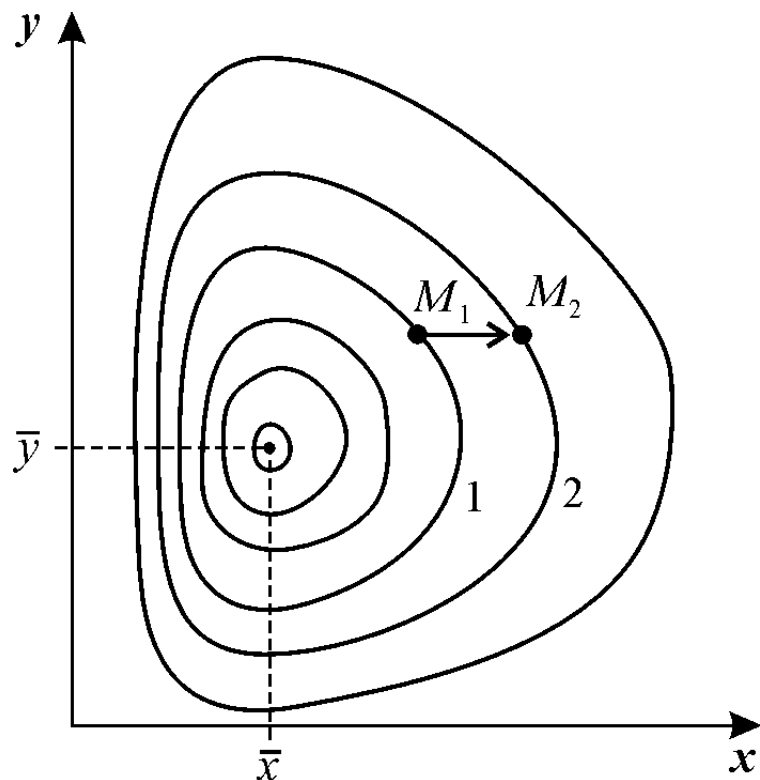
X — численность жертв

Y — численность хищников

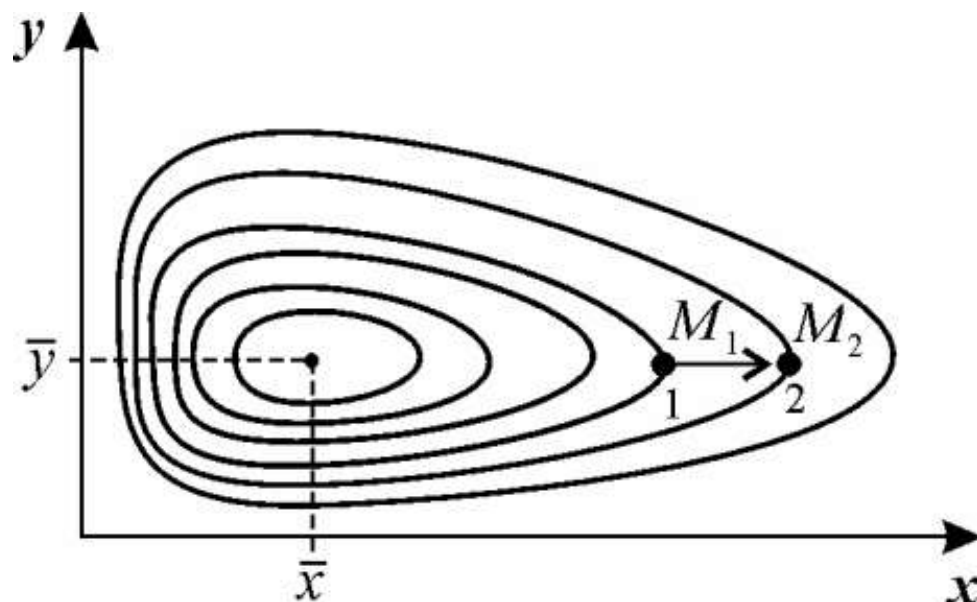


Вольтерра Вито (1860 — 1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



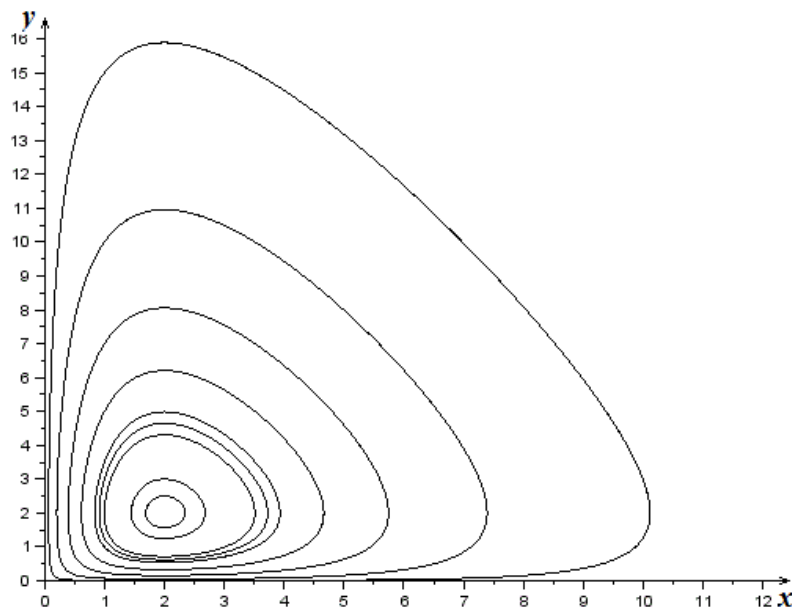
a



б

$$\varepsilon x = 4, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$

$$\varepsilon x = 2, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$



Volterra predator–prey model
describing continuous oscillations of the
population numbers.

(a) phase pattern;

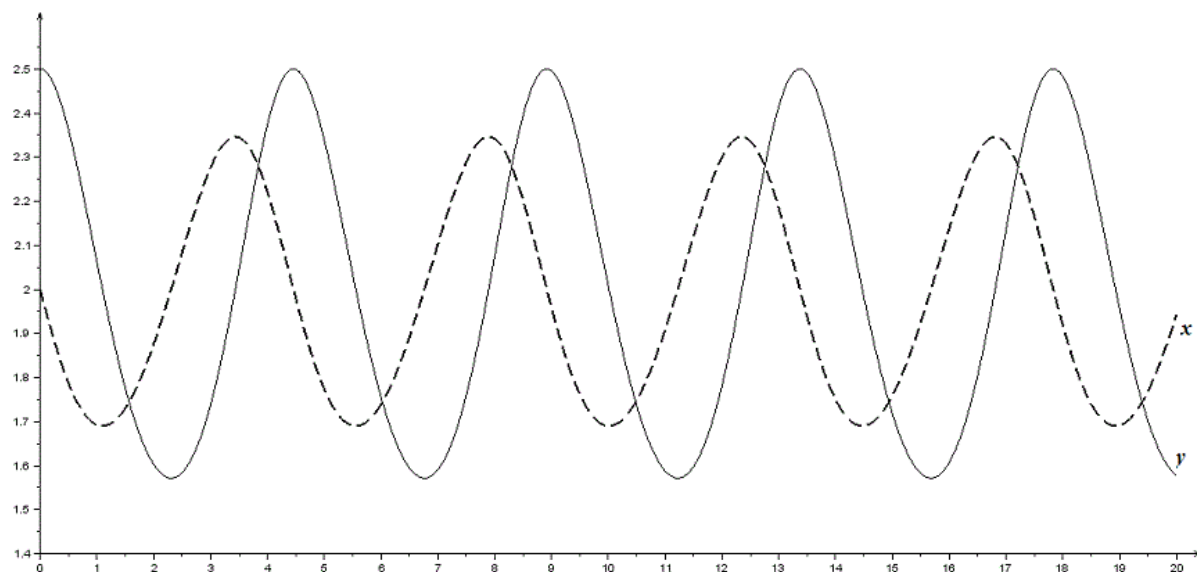
(b) dependence of the numbers
of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

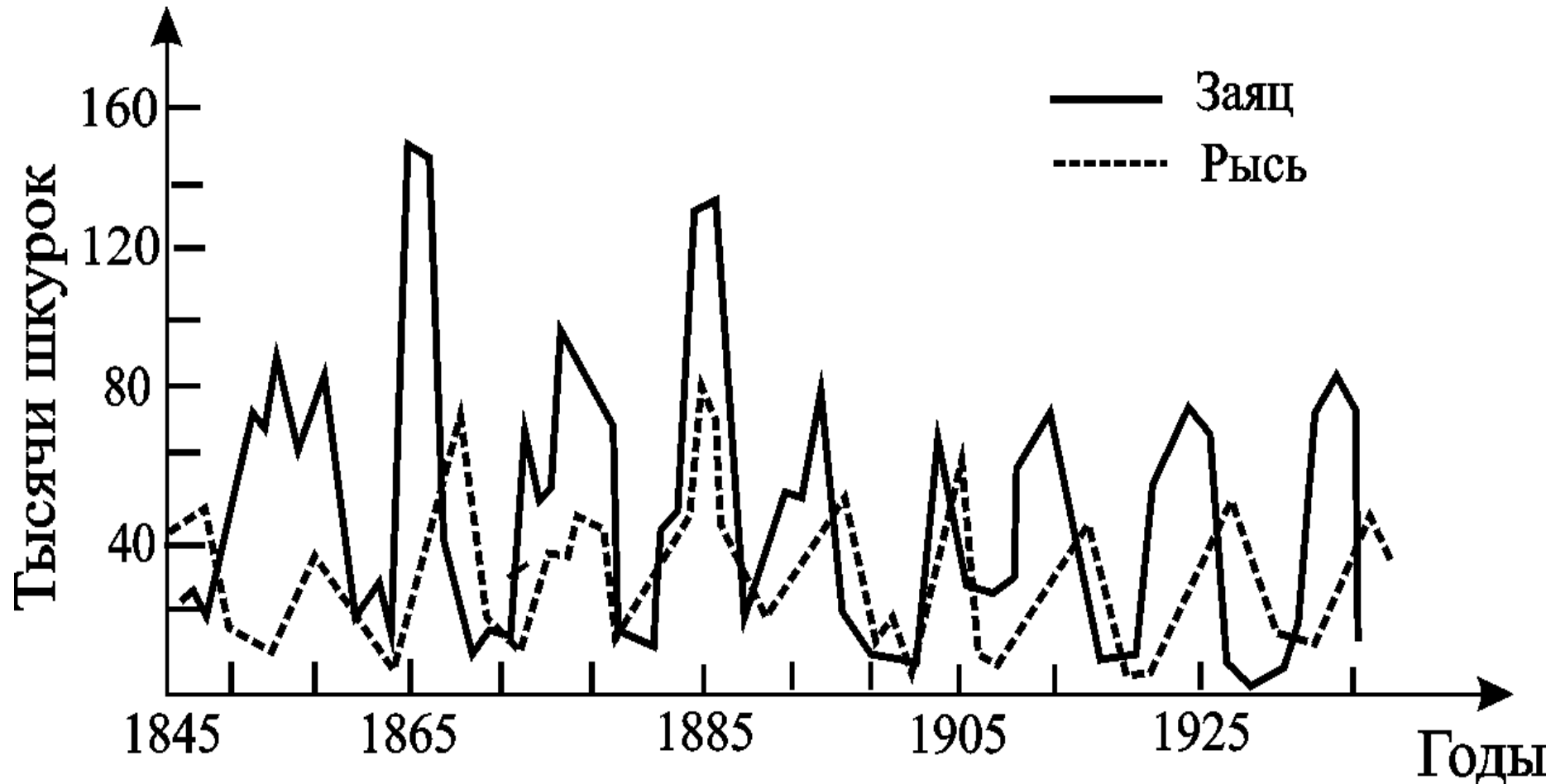
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



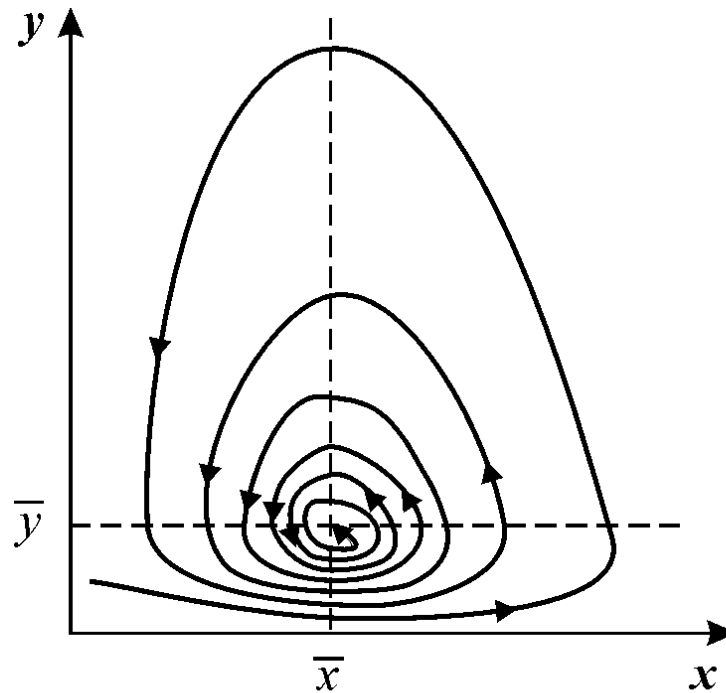
Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

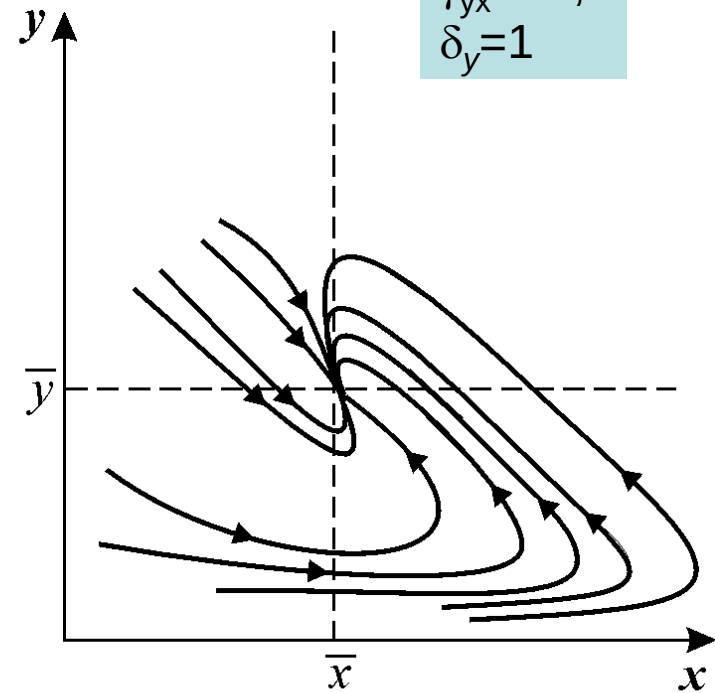
$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 18, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 5, \\ \delta_y &= 1\end{aligned}$$



a

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 1, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 1, \\ \delta_y &= 1\end{aligned}$$



б

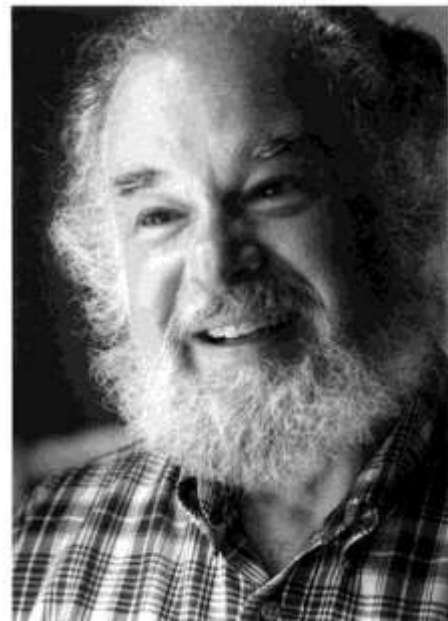


**МакАртур
Роберт**
(MacArthur Robert,
1930-1972)

Американский
биолог, эколог.
Работы по
динамике
популяций и
разнообразию
экологических
сообществ

Модель Розенцвейга- Макартура (1965)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - yL(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = -ey + kyL(x).$$



**Розенцвэйг
Майкл Л.**
(Rosenzweig
Michael L.)

Профессор.
Университета
Аризона, США
основатель и
главный редактор
журнала
“Evolutionary
Ecology” (с 1986)



А.Д. БАЗЫКИН

Биофизика взаимодействующих
популяций. М., Наука, 1985;

Нелинейная динамика
взаимодействующих

популяций. М., ИКИ, 2003

Nonlinear dynamics of interacting
populations. World Scientific. 1998

Александр Дмитриевич
Базыкин
1940-1954

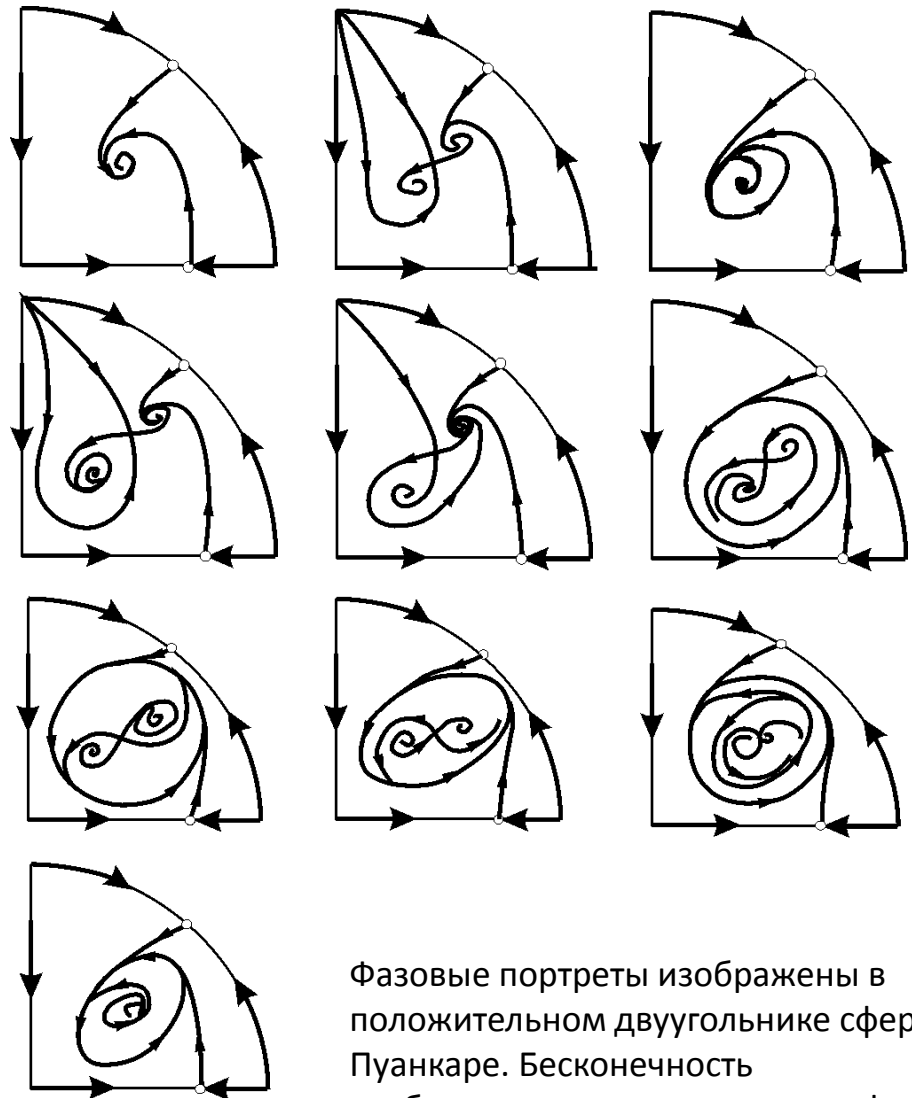
Российский биолог и
биофизик
Работы по динамике
популяций

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1 + px} - Ex^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1 + px} - My^2.$$

Набор фазовых
портретов
системы
возможных в
конечной части
первого
квадранта и
соответствующих
областям 1 - 10
параметрического
портрета

(Базыкин, 1985)



Фазовые портреты изображены в
положительном двуугольнике сферы
Пуанкаре. Бесконечность
отображается на внутренность сферы
конечного радиуса