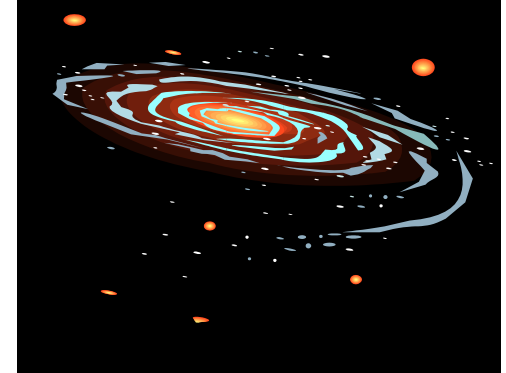
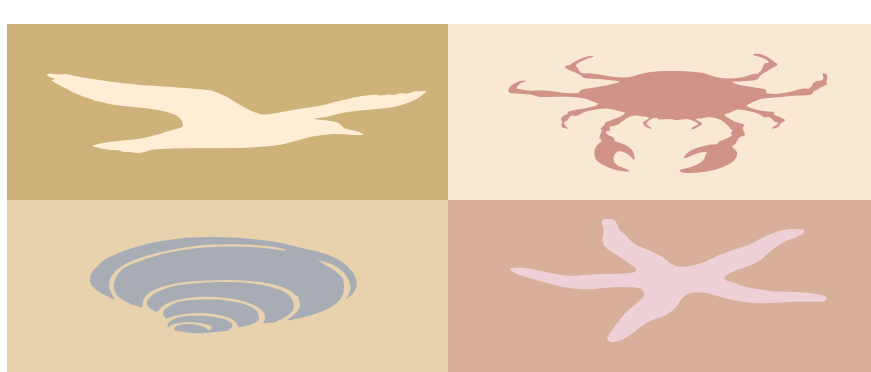
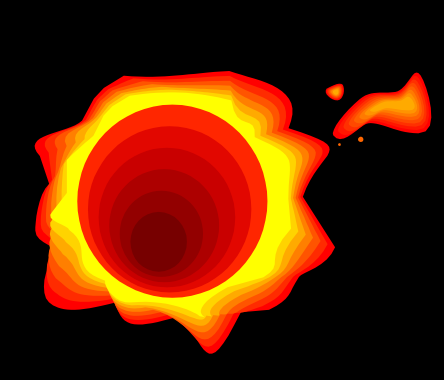


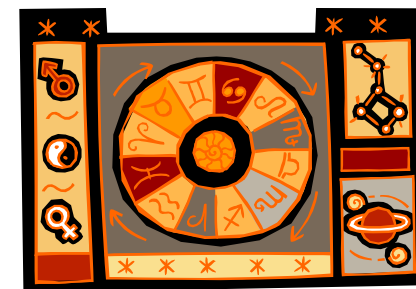


www.biophys.msu.ru

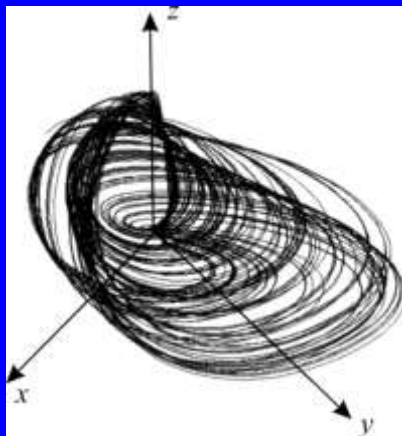
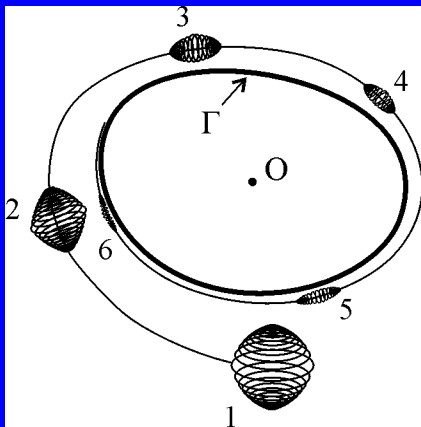
Модели нелинейного мира

Лекция 7(8)

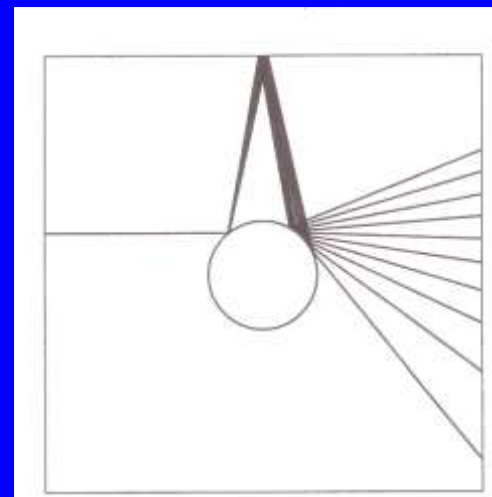
- **Галина Юрьевна Ризниченко**
- Каф. биофизики Биологического ф-та Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119
- тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;
- E-mail: riznich@biophys.msu.ru



mathbio.ru/mnw



Г.Ю Ризниченко



Динамический хаос



Публий Овидий
Назон (43 до н.э.
– 18 н.э)

Овидий. Метаморфозы 1.5

пер. С.В.Шервинского

Не было моря, земли и над всем распростертого неба
Лик был природы един на всей широте мироздания, -
Хаосом звали его. Нечлененной и грубой громадой,
Бременем косным он был, - только, - где собраны были
Связанных слабо вещей семена разносущные вкупе.

Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца



- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

Динамический хаос. Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов.
Фракталы*

χαος

CHAOS



Александр
Юрьевич
Лоскутов
1960-2011

Weather

Э.Лоренц



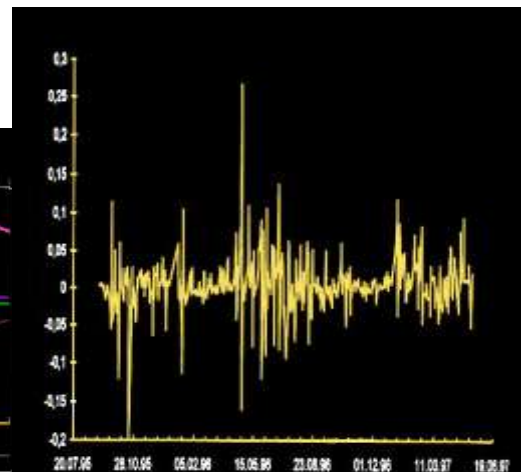
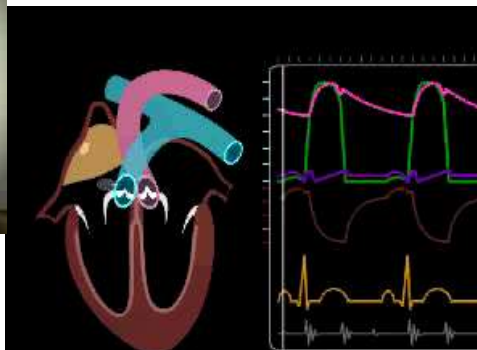
Chemical
Kinetics



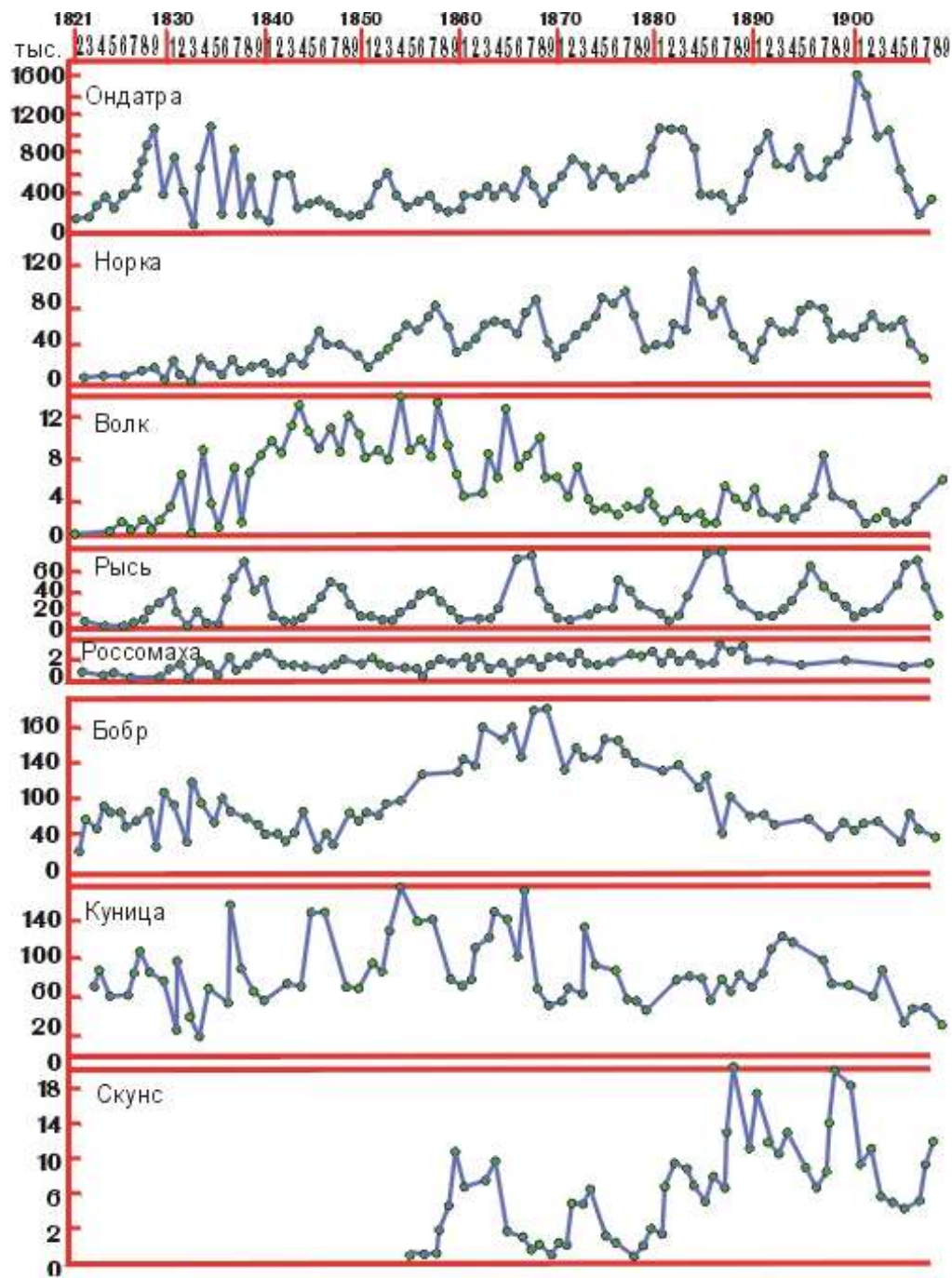
BZ-reaction

Белоусов и
Жаботинский

Heart rythm

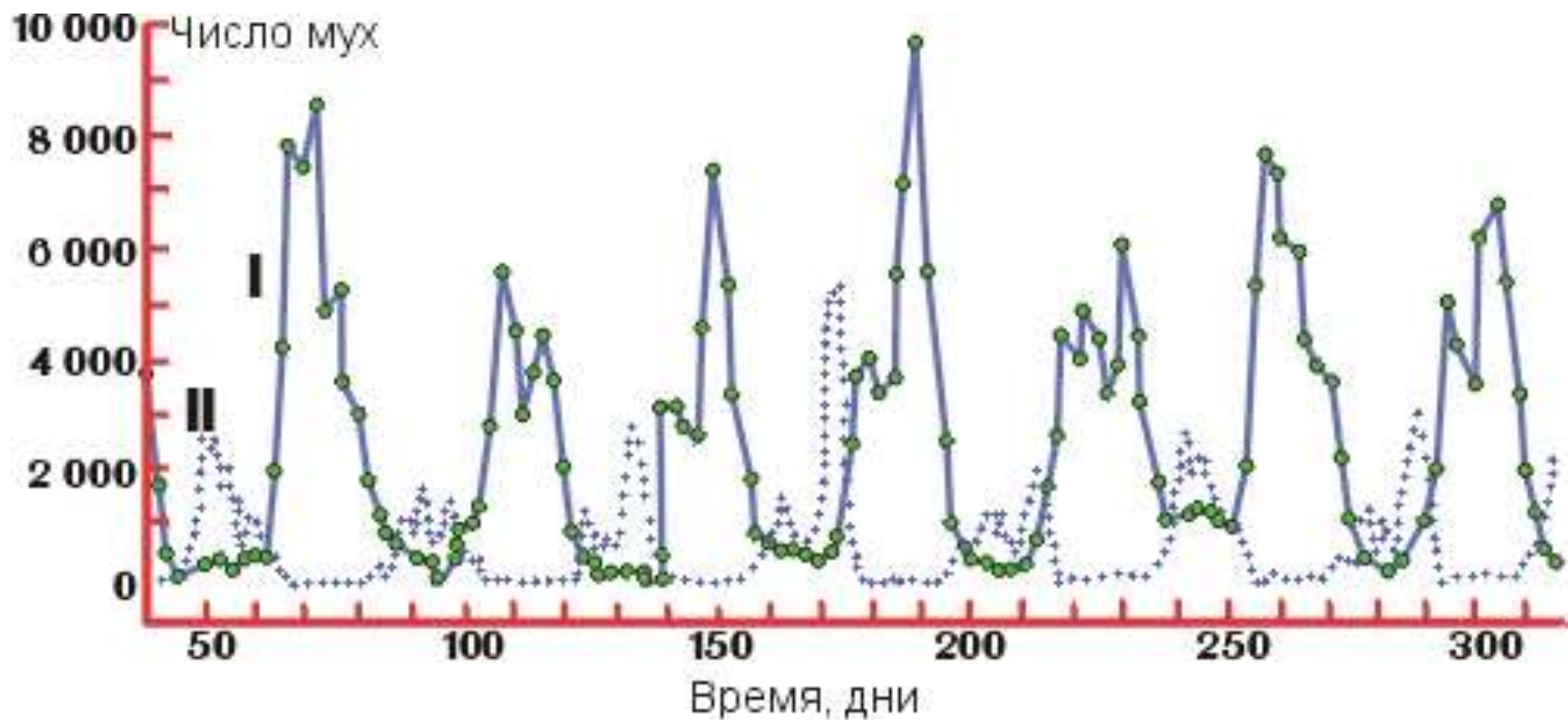


Биржевые
индексы



Данные по
заготовкам
пушнины
компании
Гудзонова
Залива

Динамика численности плодовой мушки

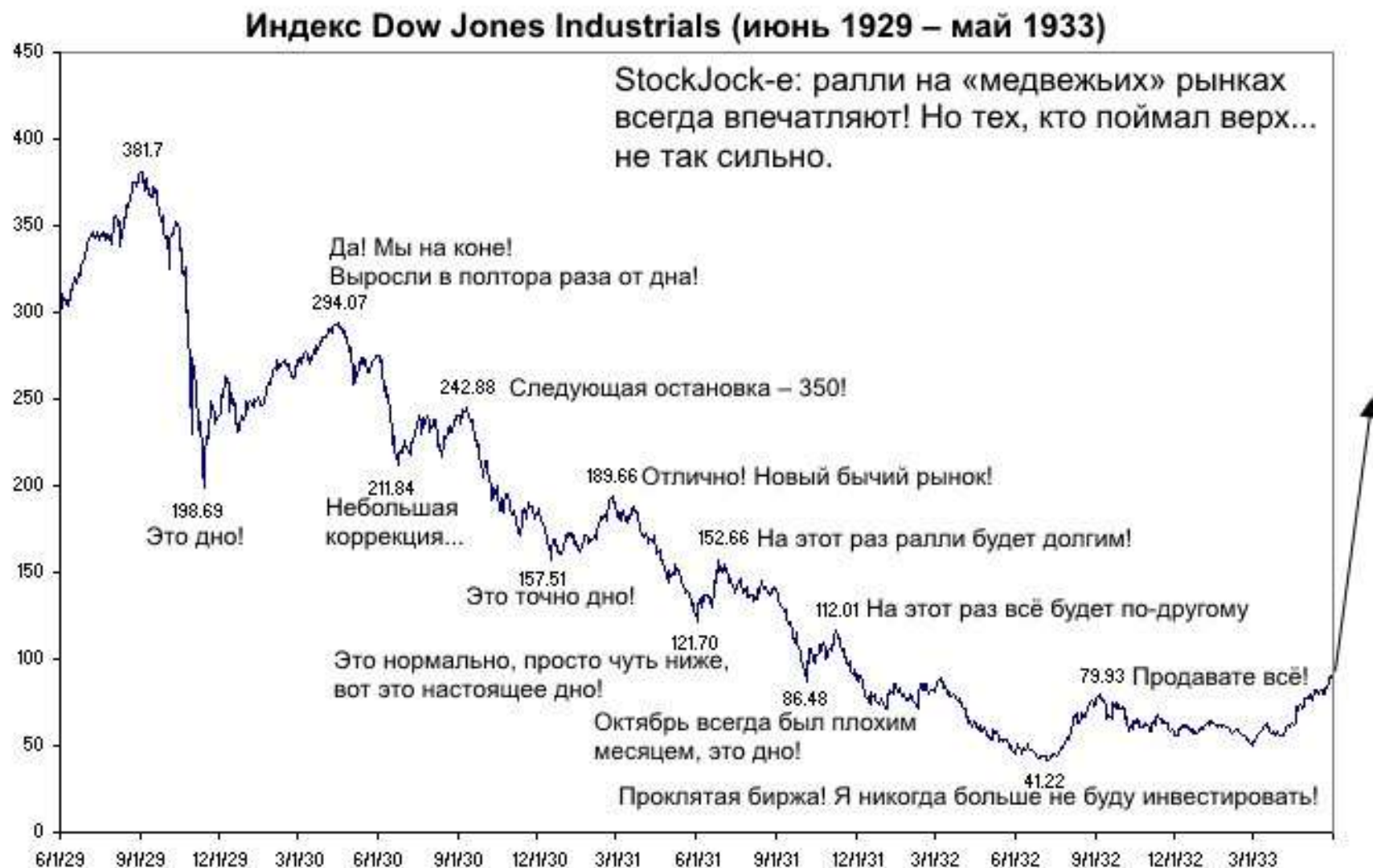


Биржевые индексы

Индекс S&P 500, график от Financial Times



Индекс Доу-Джонс 1929-1933



Анри Пуанкаре —

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах
совершенно ничтожная причина,
ускользающая от нас по своей
малости, вызывает значительные
действия, которые мы не в
состоянии предугадать...
Предсказание становится
невозможным, мы имеем перед
собой явление случайное».



Лоренц

Lorenz EN (1963)
Deterministic non-periodic
flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

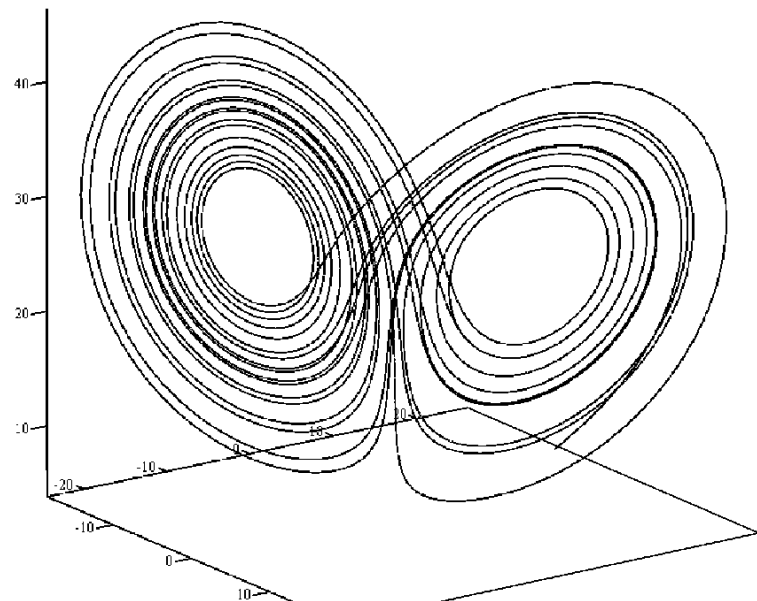
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10,$$

$$b=8/3$$

Хаотические траектории в
системе Лоренца

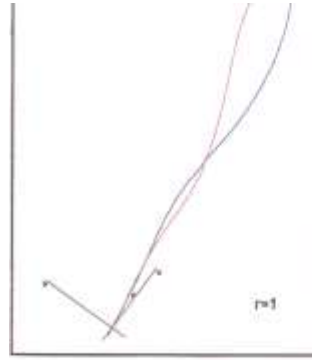


•**Одномодовый лазер.** Здесь x — амплитуда волн в резонаторе лазера, y — поляризация, z — инверсия населённости энергетических уровней, b и σ — отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, r — интенсивность накачки.

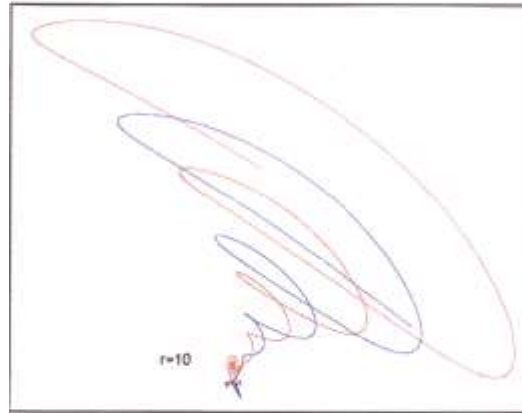
Игорь Федик
каф. биофизики

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

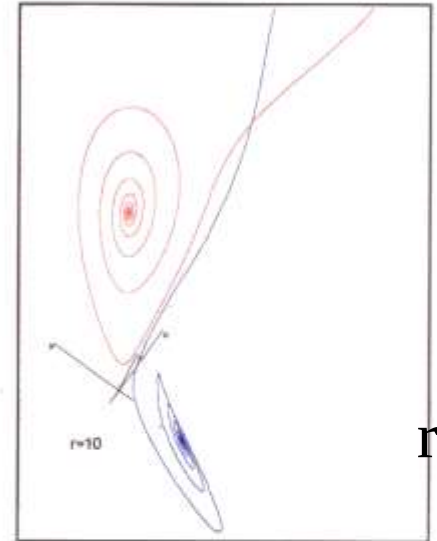
Траектории
системы
Лоренца при
разных
значениях
параметра
 r



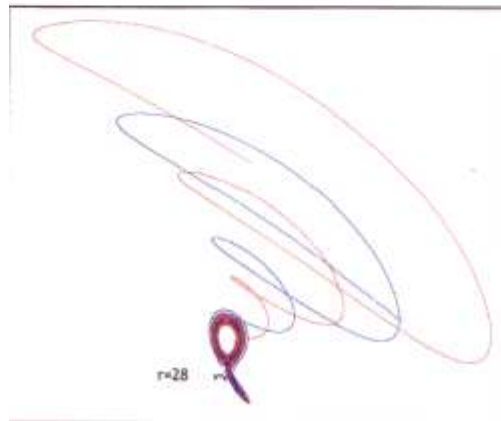
$r=1$



$r=10$

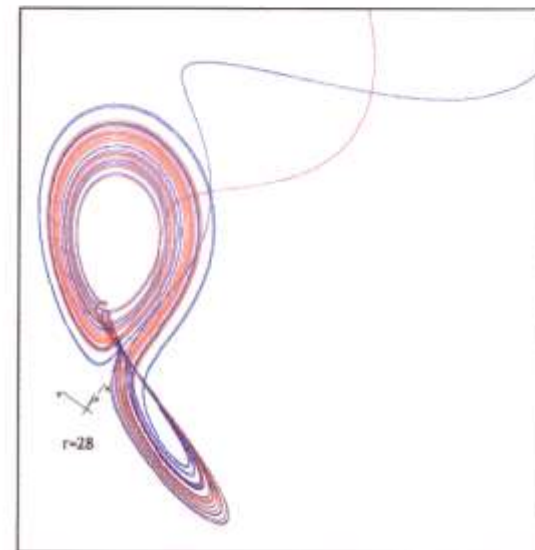


$r=10$



$r=28$

$r=28$



$r=28$

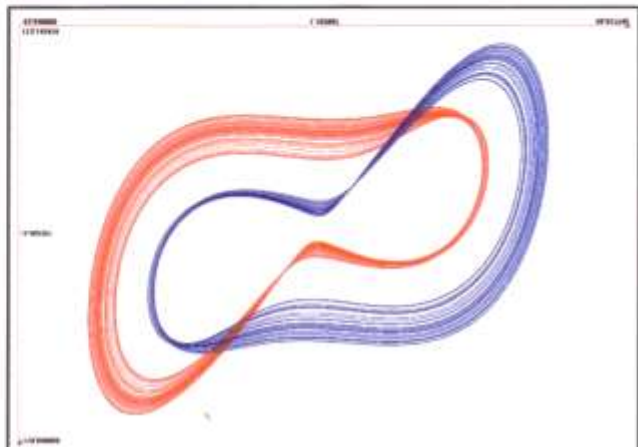
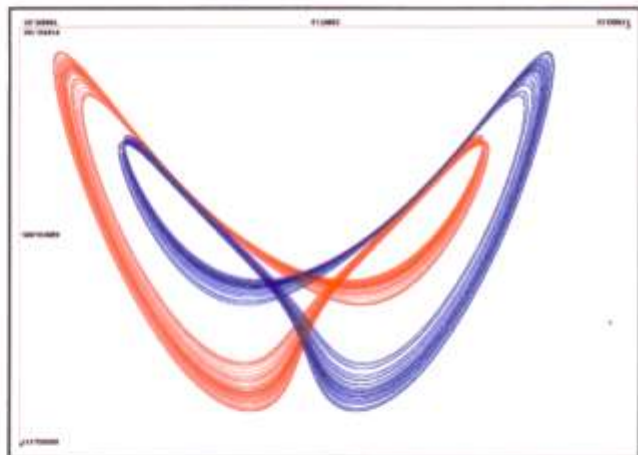
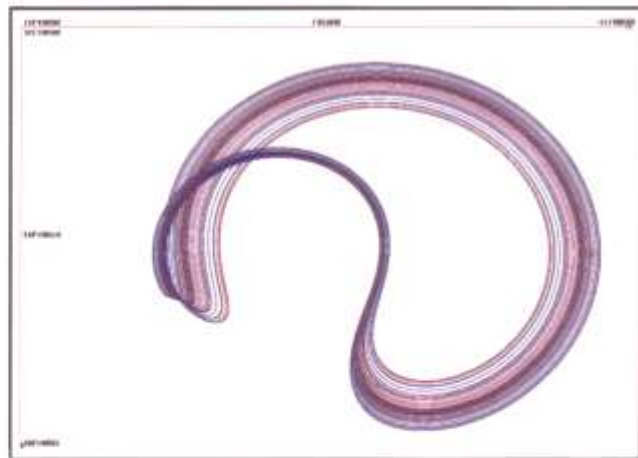
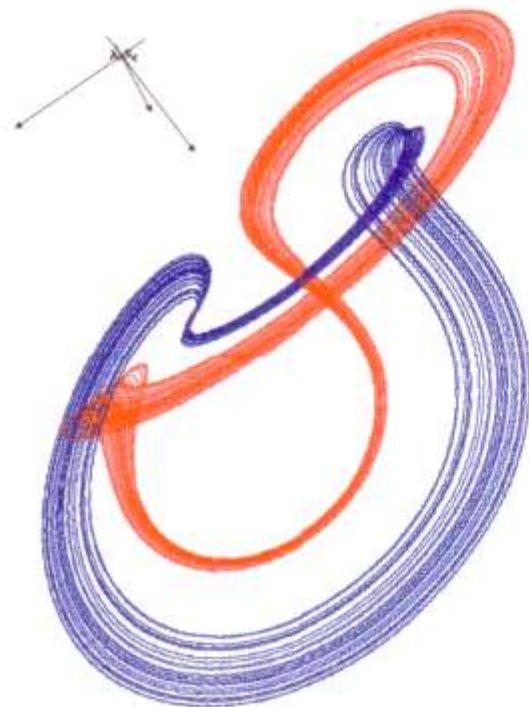
Система Лоренца 1



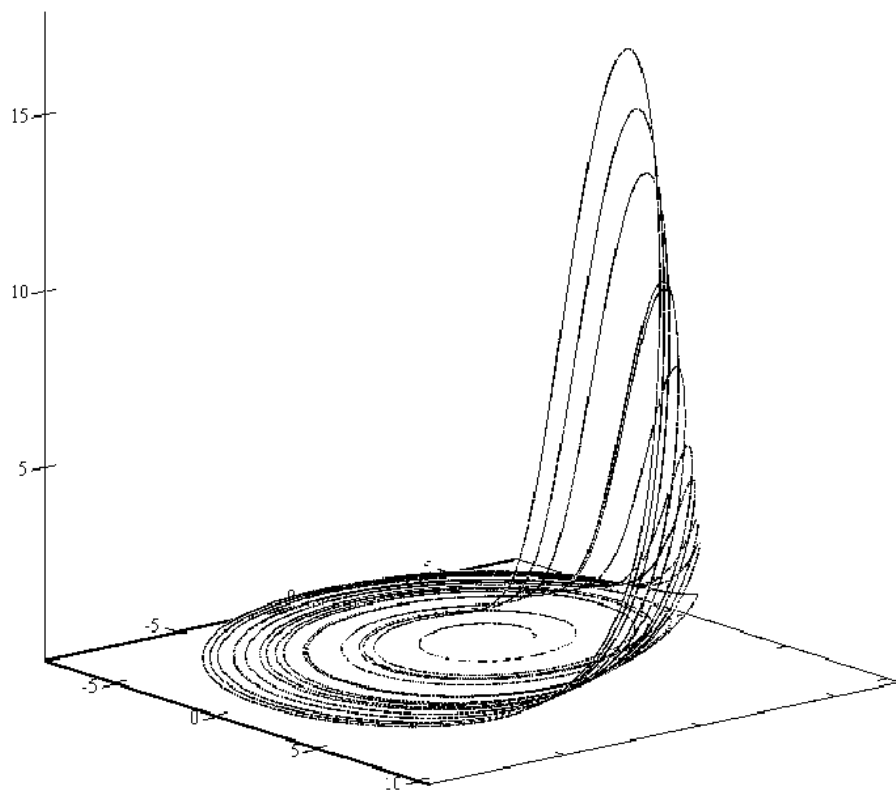
Edward Norton
Lorenz
1917-2008
Американский
математик и
метеоролог
Один из основателей
теории хаоса

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

$$r=28, s=10, b=8/3$$



Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

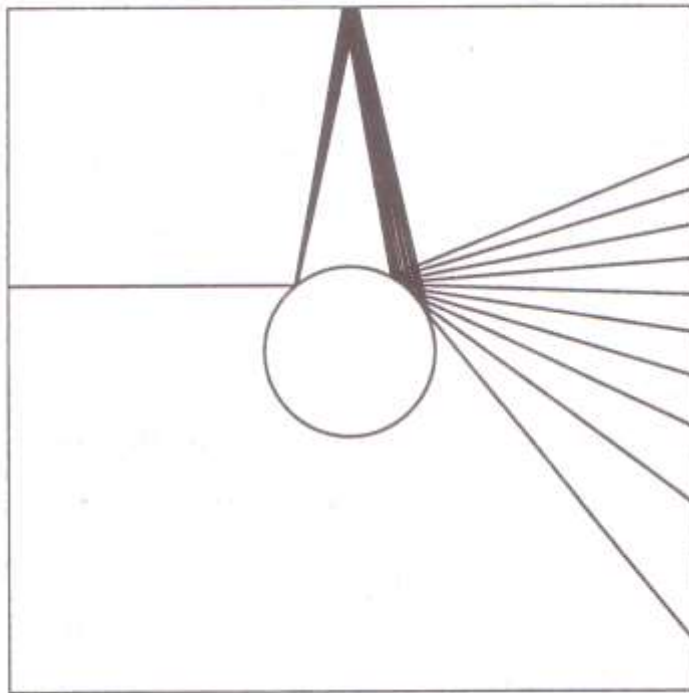
Хаотическое поведение возникает

- ☐ ● не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Потребность в определенности – естественная биологическая потребность человека, но она же – порок мышления

Разбегание траекторий



Из книги «Черный лебедь»



Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

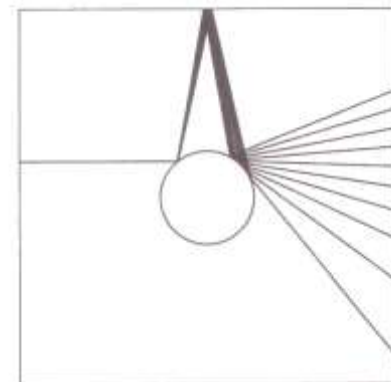
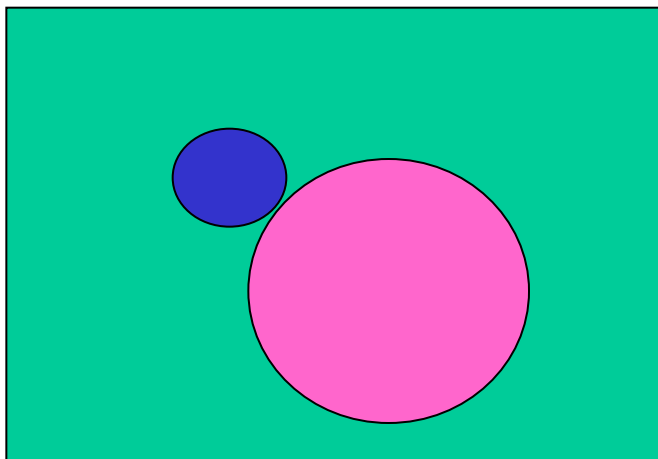
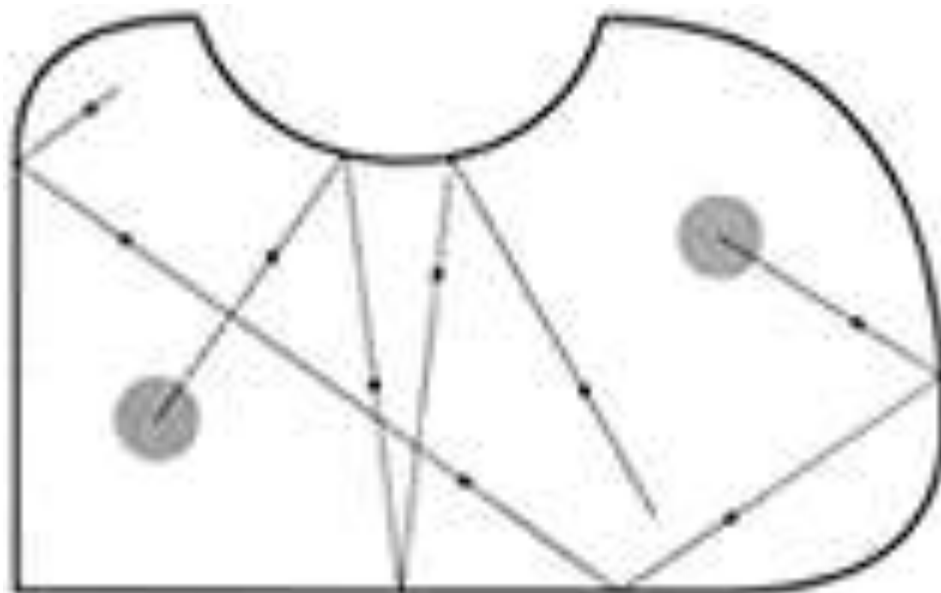


Яков Григорьевич
Синай

Лауреат Абелевской
премии март 2014 г.

Профессор Мехмата МГУ.
Работы по теории
динамических систем,
статистической физике

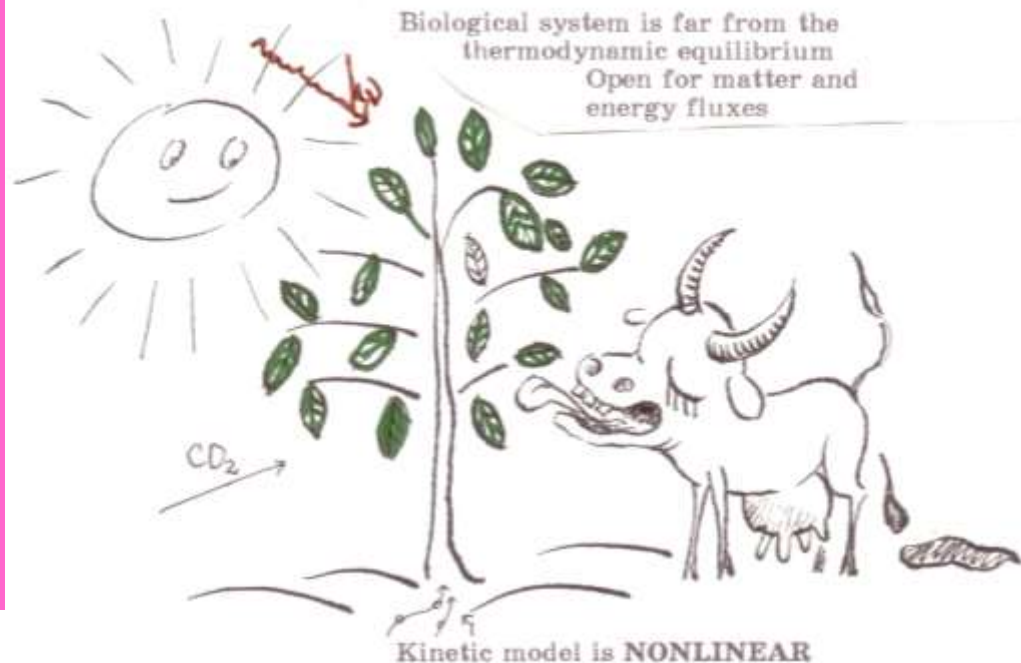
Биллиард Синая



НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



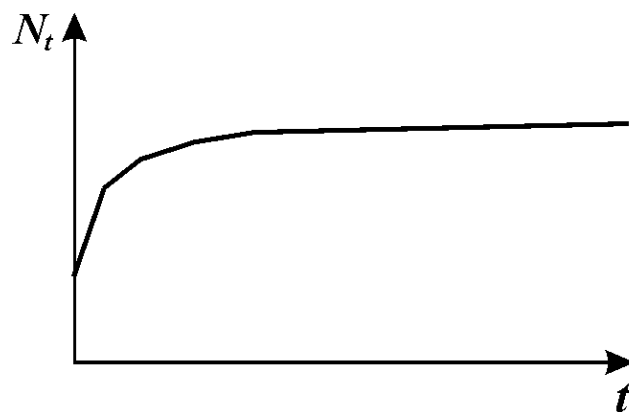
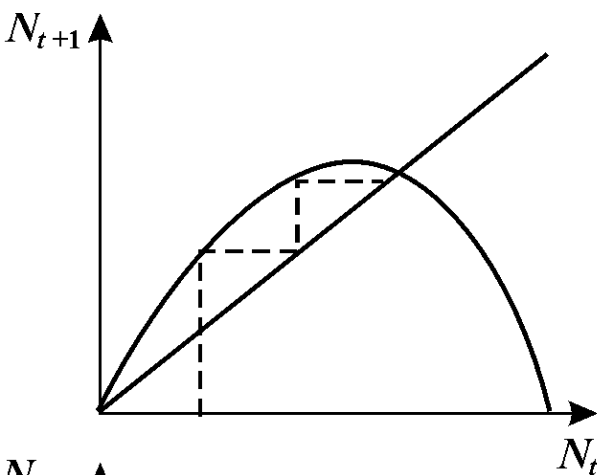
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

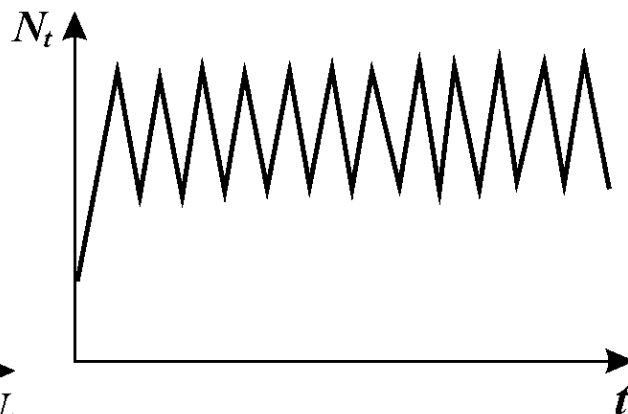
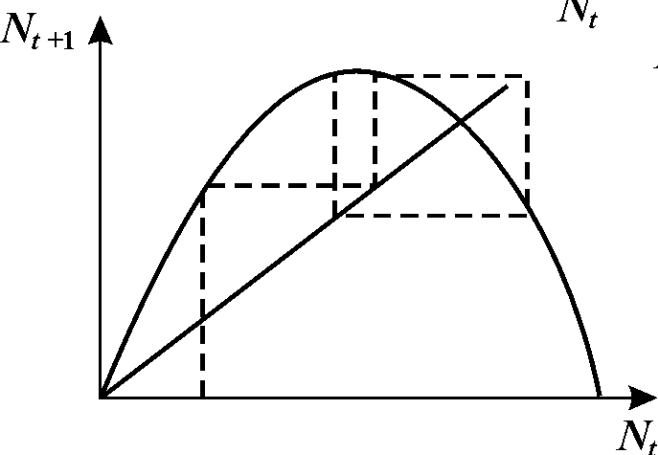
$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

Здесь F — детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

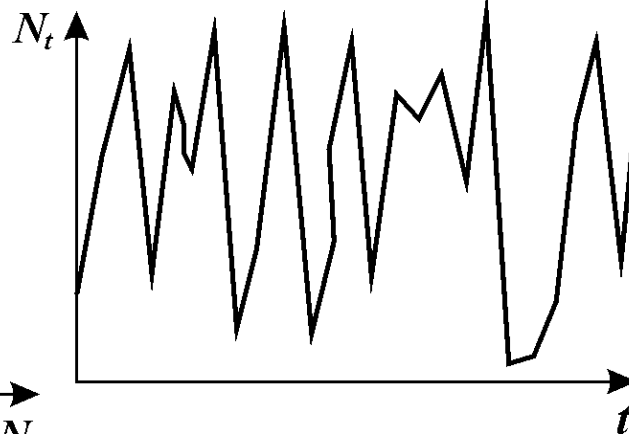
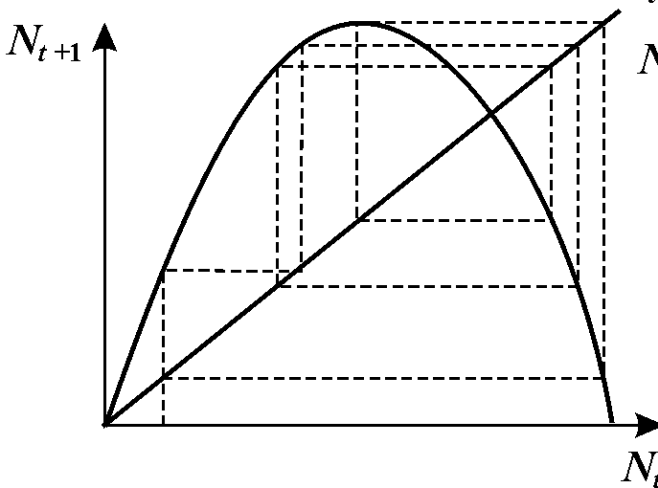


a Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$



б

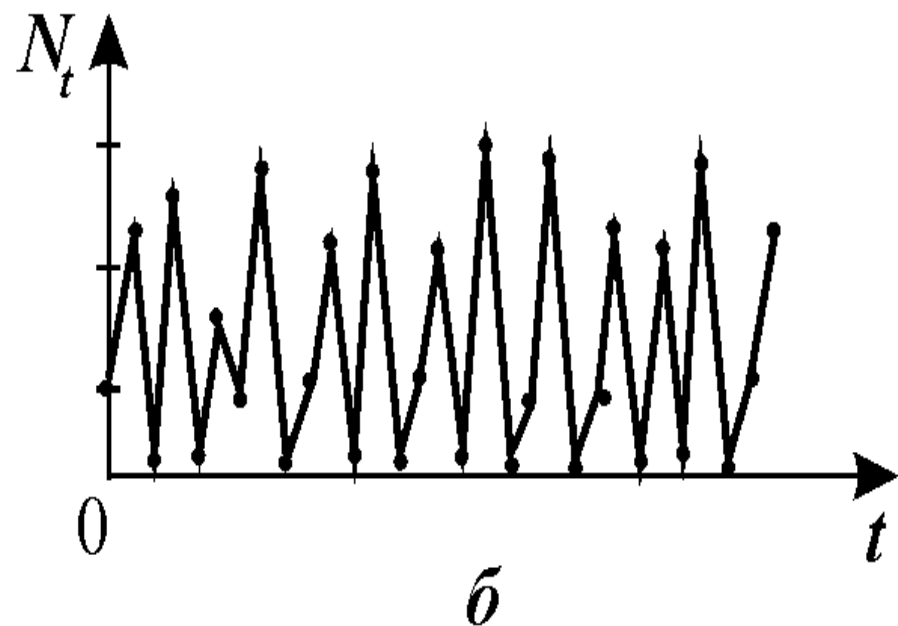
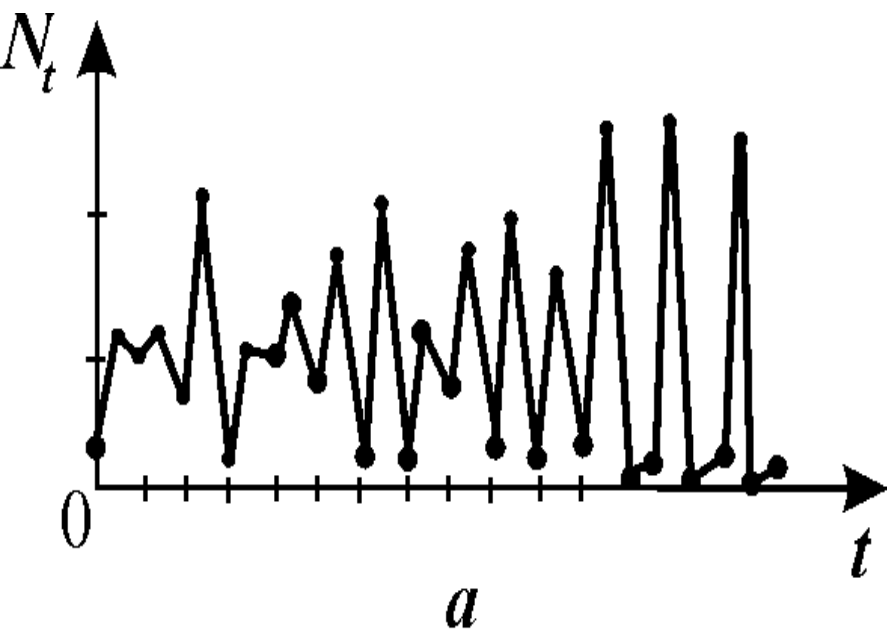


в

Пример
детерминиро-
ванного
хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

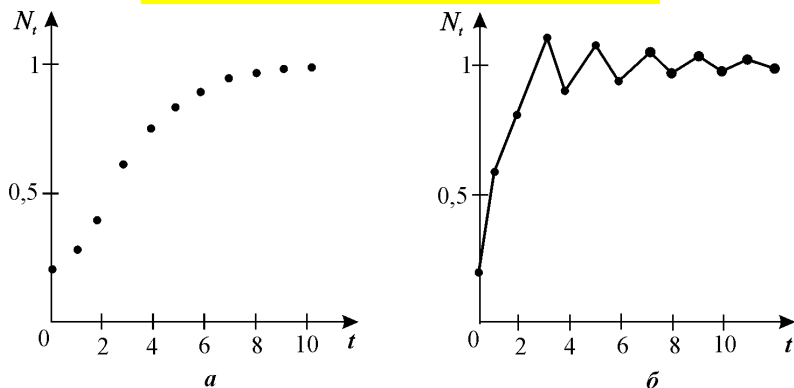
Дискретный аналог
логистического уравнения



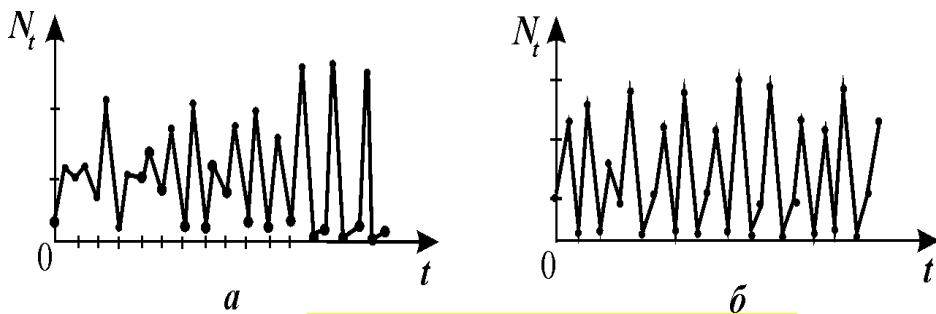
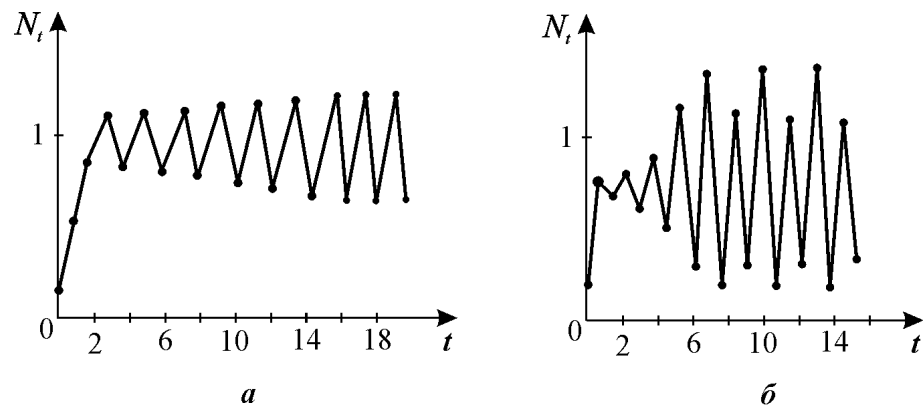
При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
 решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет собой затухающие колебания
 при $1 < r < 2$
 при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы;
 при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$
 при $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий. Существуют
 трехточечные циклы и квазистохастические решения

Устойчивое решение



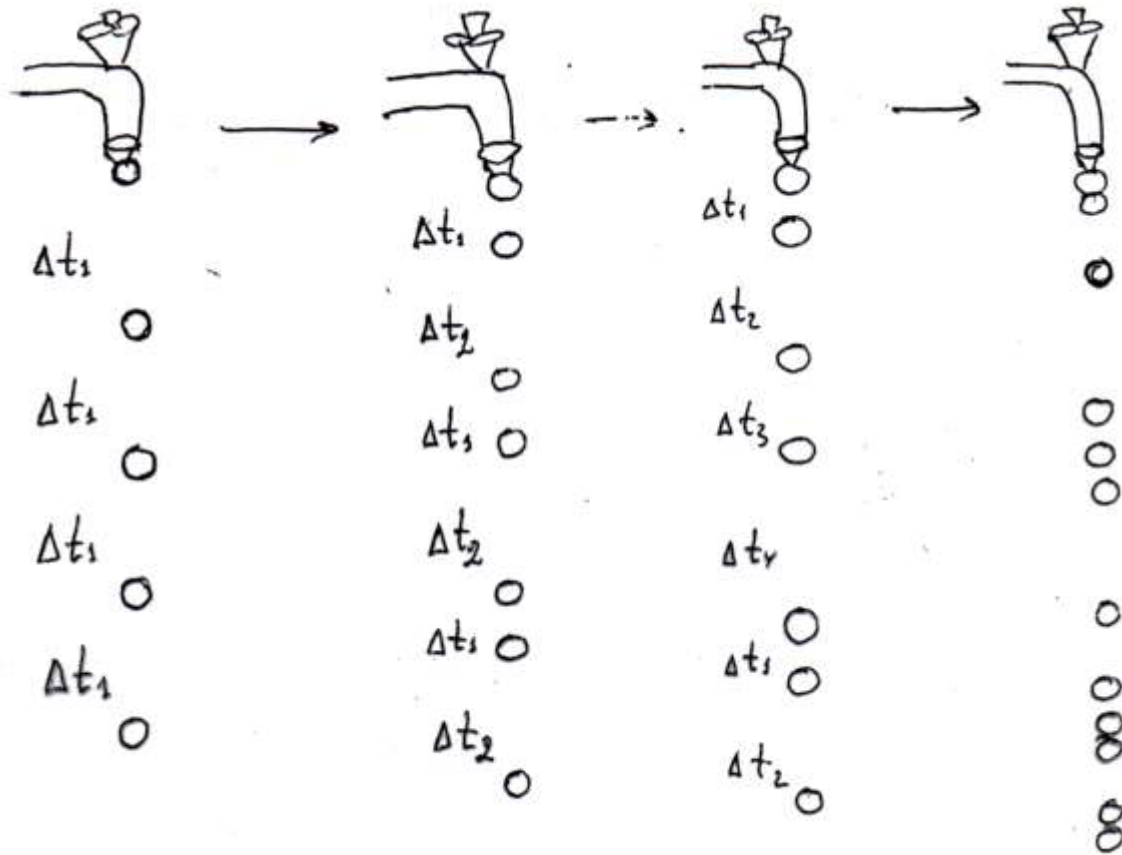
Циклы длины $2k$



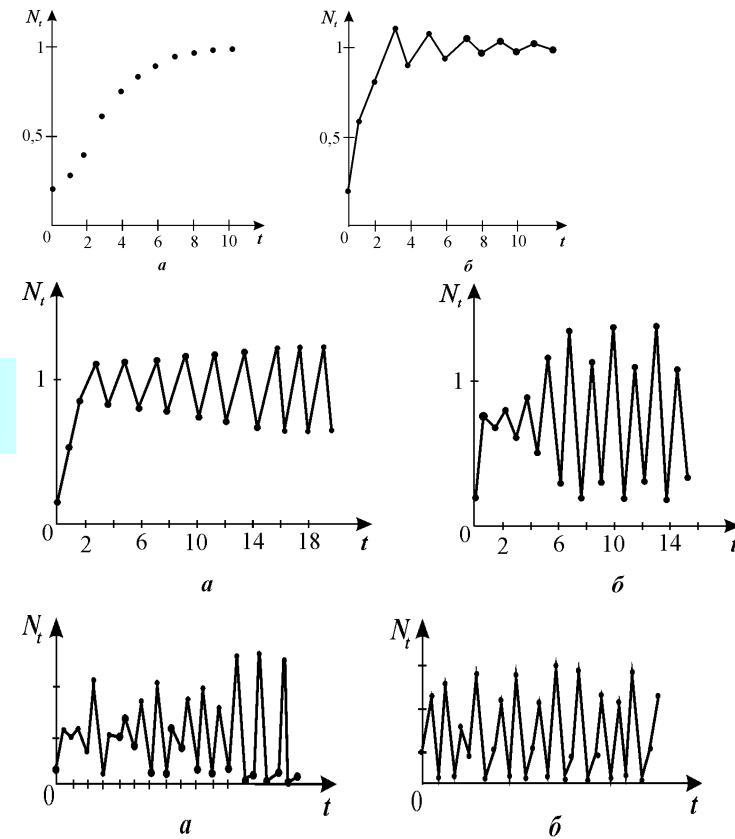
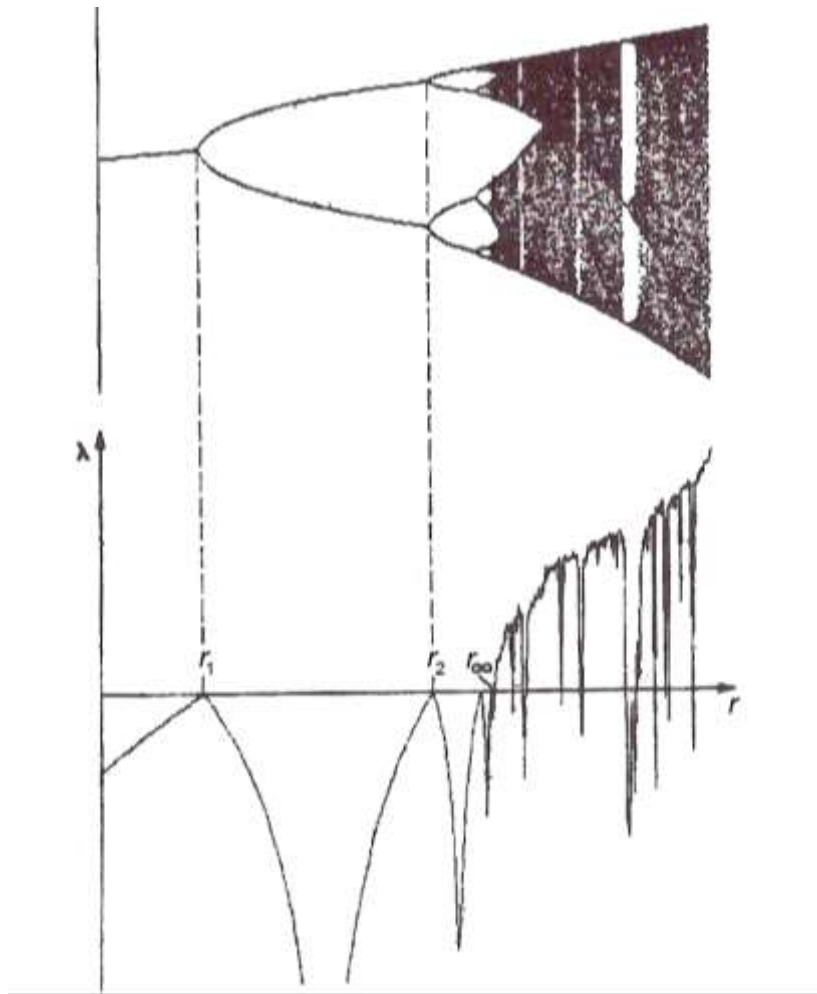
Динамический хаос

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

Переход к хаосу через удвоение периода



Сценарий удвоения предельного цикла



Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|.$$

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения ρ_i матрицы линеаризации. Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $y(t^*)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей λ_i не содержал положительных показателей.

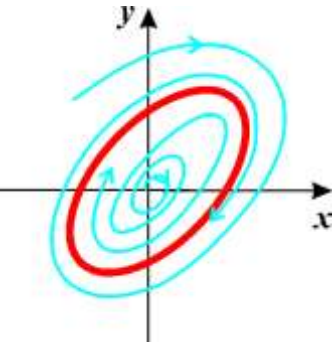
Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого движения $x(t)$, для которого $\|x(t) - x^*(t)\| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство: $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$.

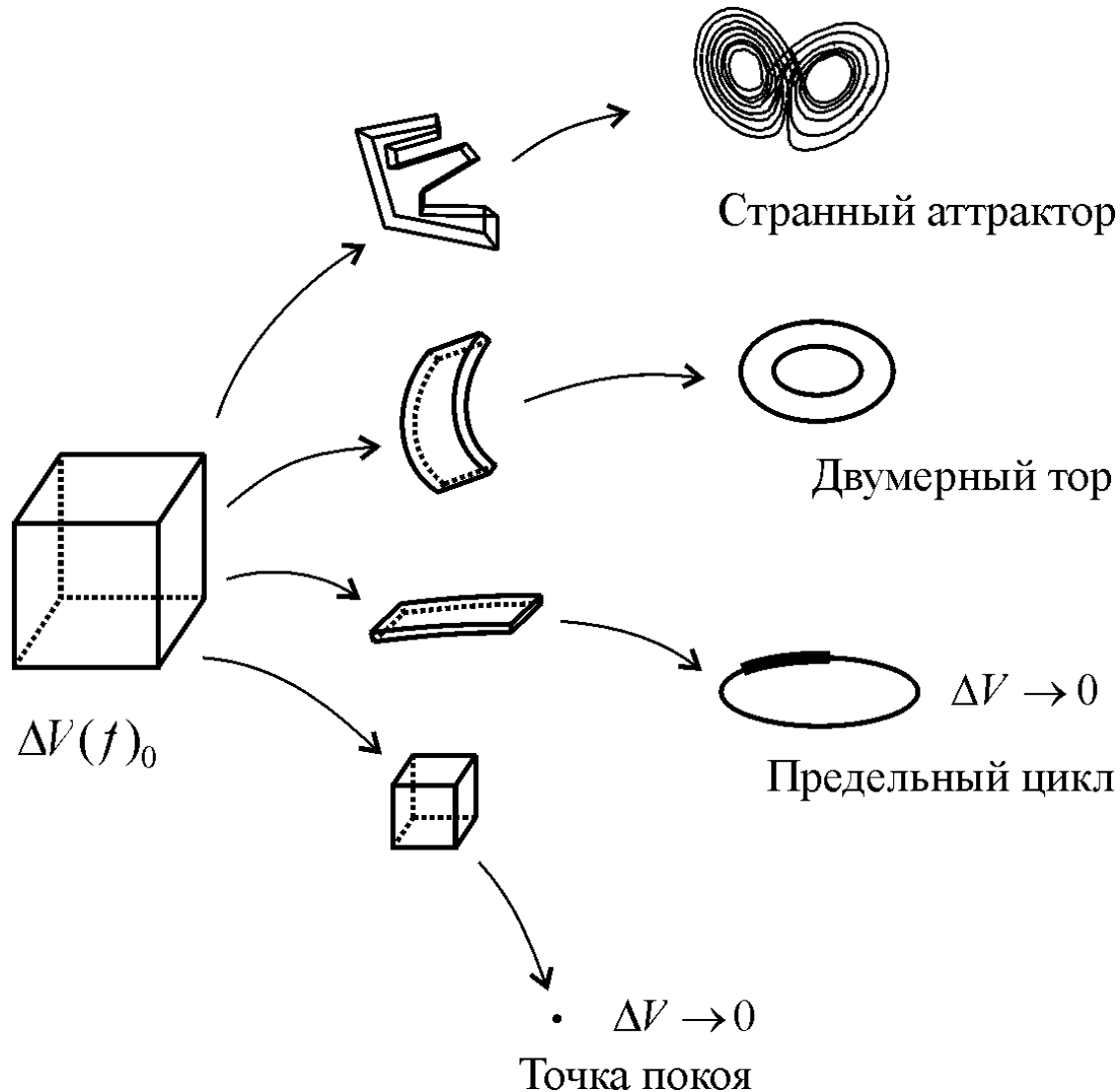
Знак $\| \quad \|$ означает норму (длину) вектора.

Устойчивость по Пуассону



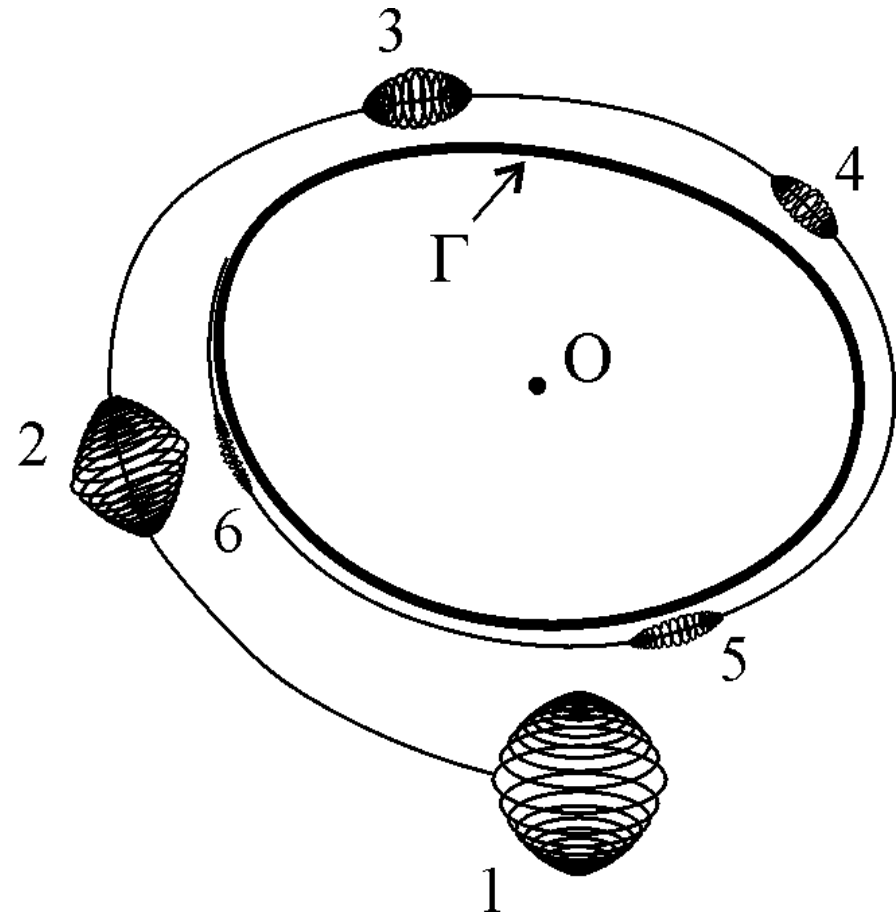
предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.

Диссипативные системы

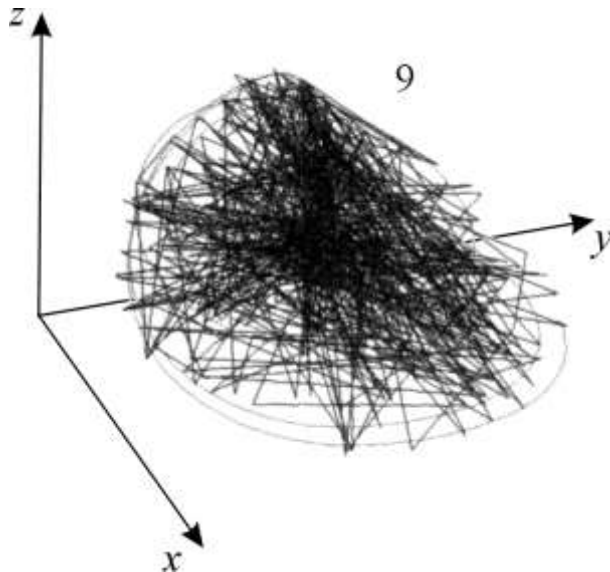
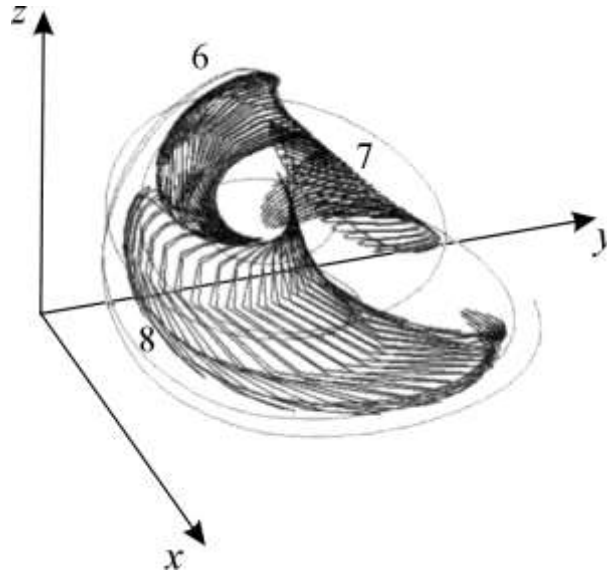
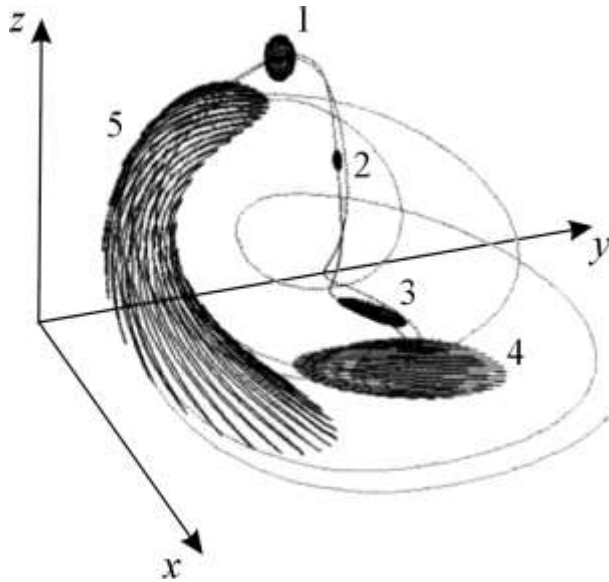


Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε
при «наматывании» траектории на устойчивый
предельный цикл -траектория Γ .



Эволюция малого
первоначального
фазового объема во
времени в
динамической
системе
(Анищенко и др.,
1999).



$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

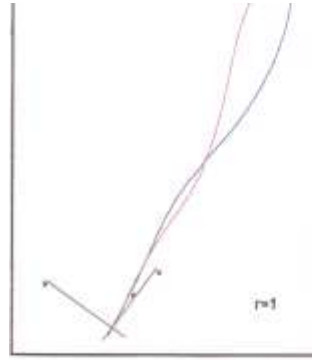
$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

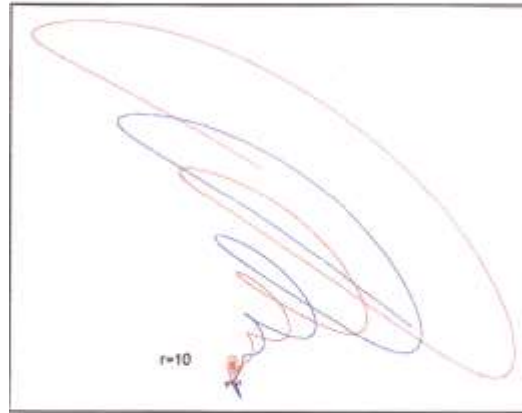
Игорь Федик
каф. биофизики

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

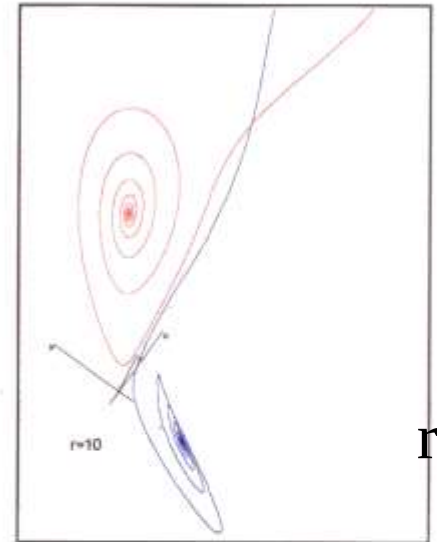
Траектории
системы
Лоренца при
разных
значениях
параметра
 r



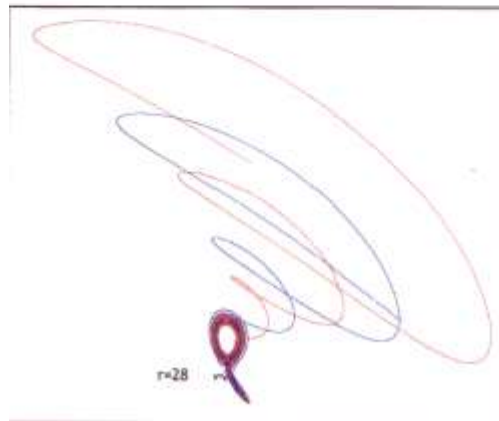
$r=1$



$r=10$

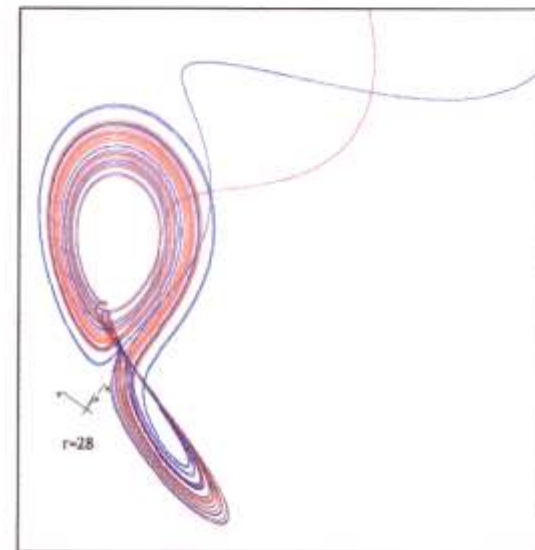


$r=10$



$r=28$

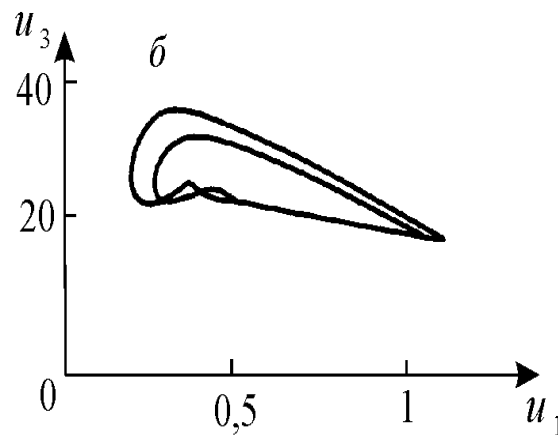
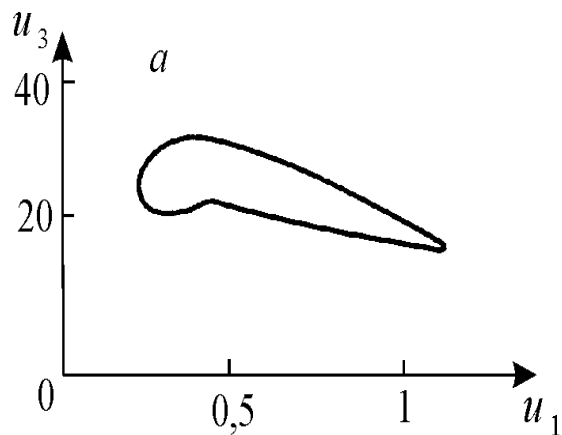
$r=28$



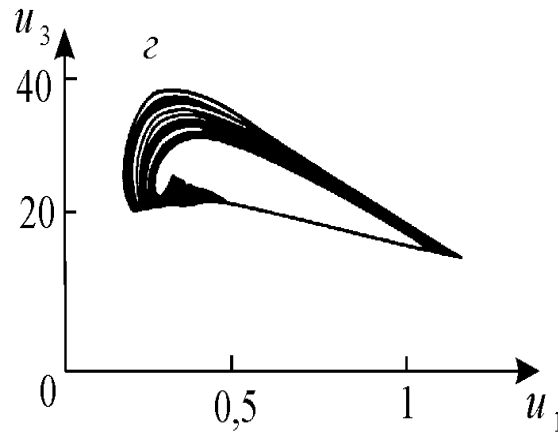
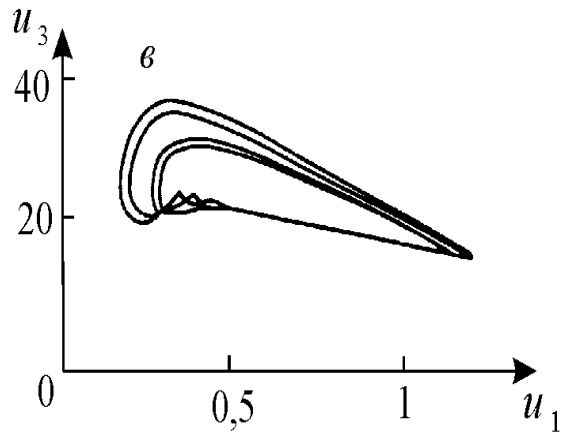
$r=28$

Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием
- Распределенные в пространстве системы



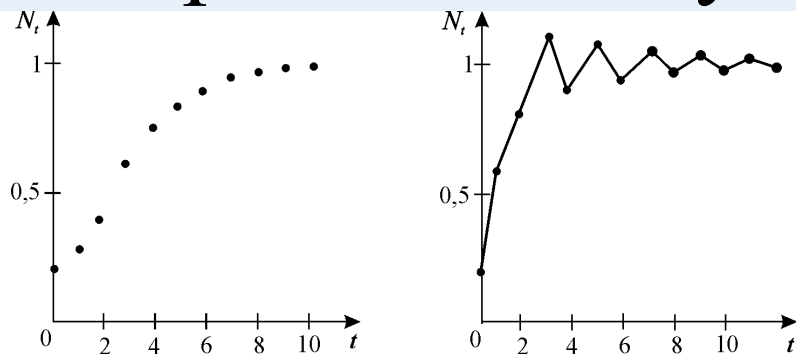
Странный
аттрактор в
системе хищник
— две жертвы



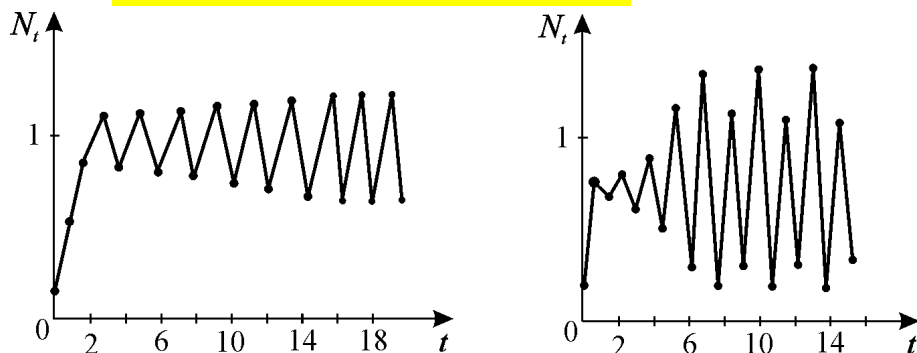
$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).\end{aligned}$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апони́на, Ю.Апони́н, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $a - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

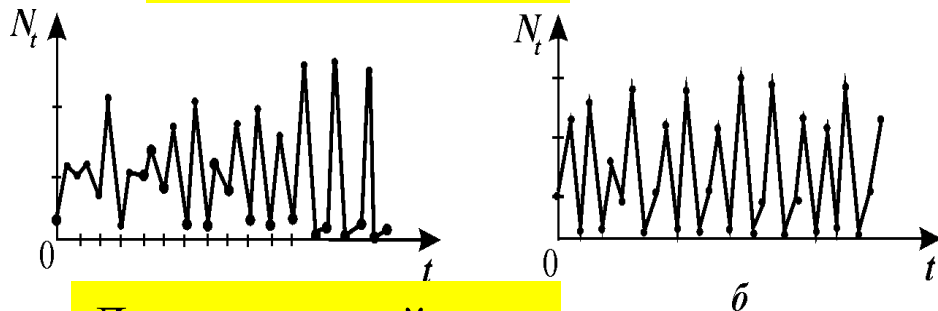
Переход к хаосу через удвоение периода



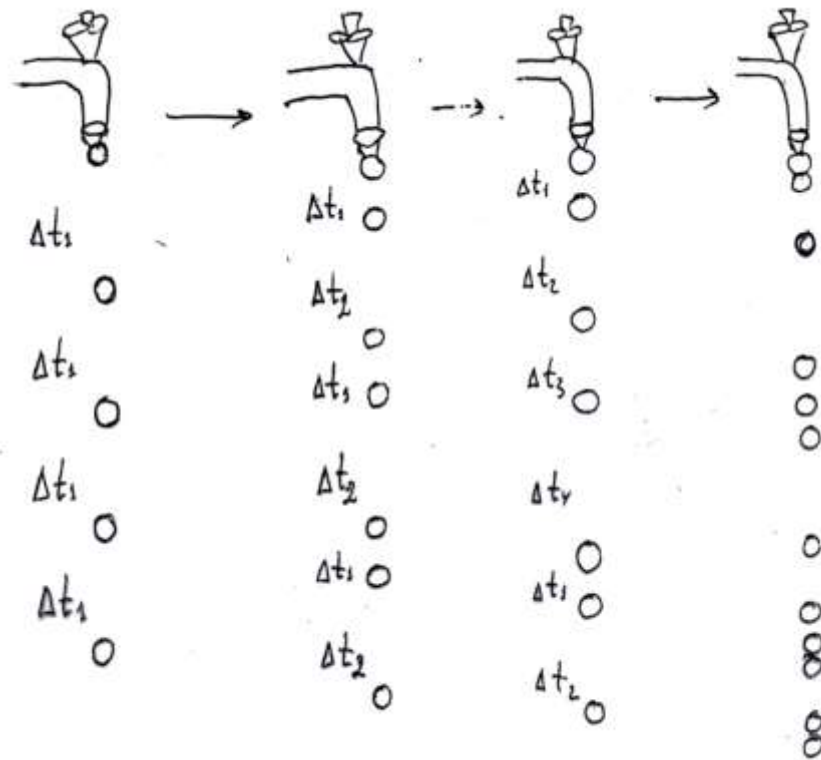
Устойчивое решение



Циклы длины $2k$



Динамический хаос



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$