

www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского
государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

E-mail: riznich@biophys.msu.ru

Лекция 8



<http://mathbio.ru/mnw>

Фракталы – самоподобные множества



*Benoît
Mandelbrot
1924-2009*

Бенуа Мальдельброт
1924-2010.

Французский и американский
математик. Придумал понятие
«фрактал» - “Fractus” (лат) –
сломанный, разбитый.



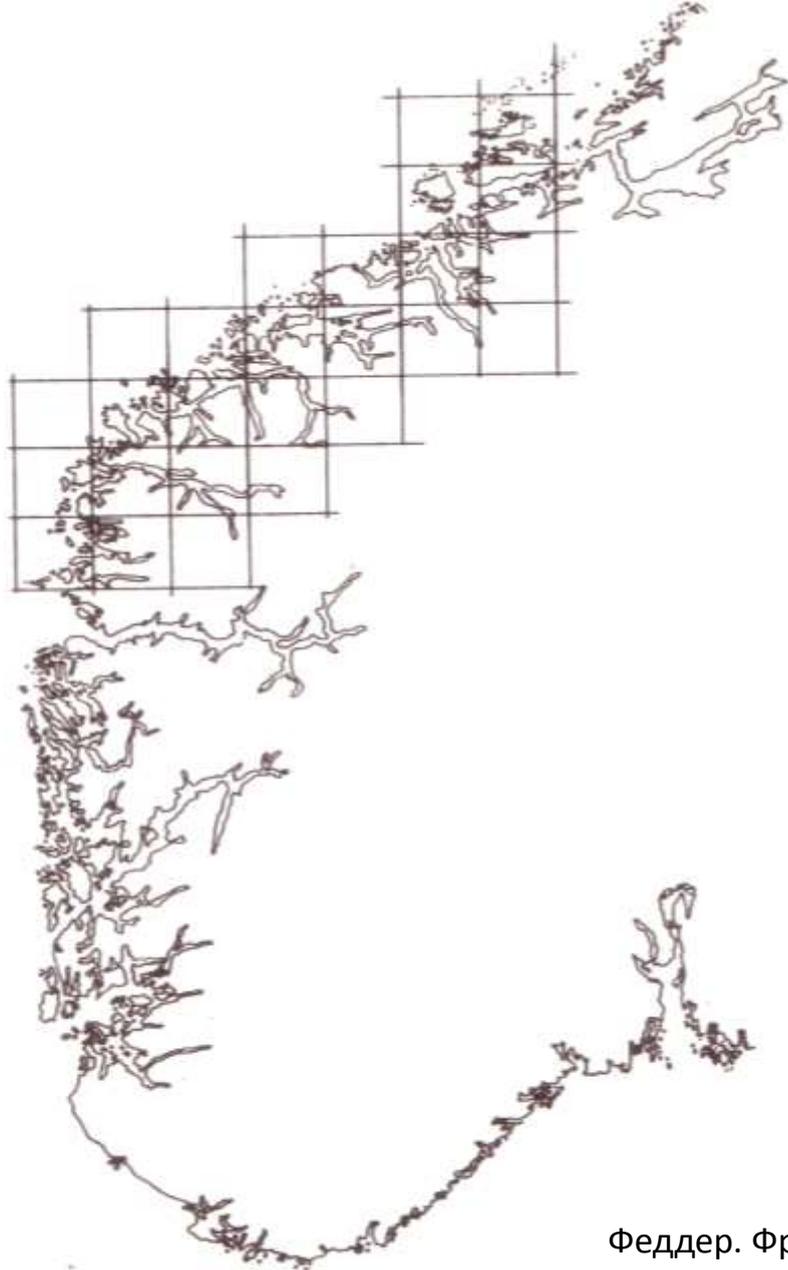


РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия пересечена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью растра, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.

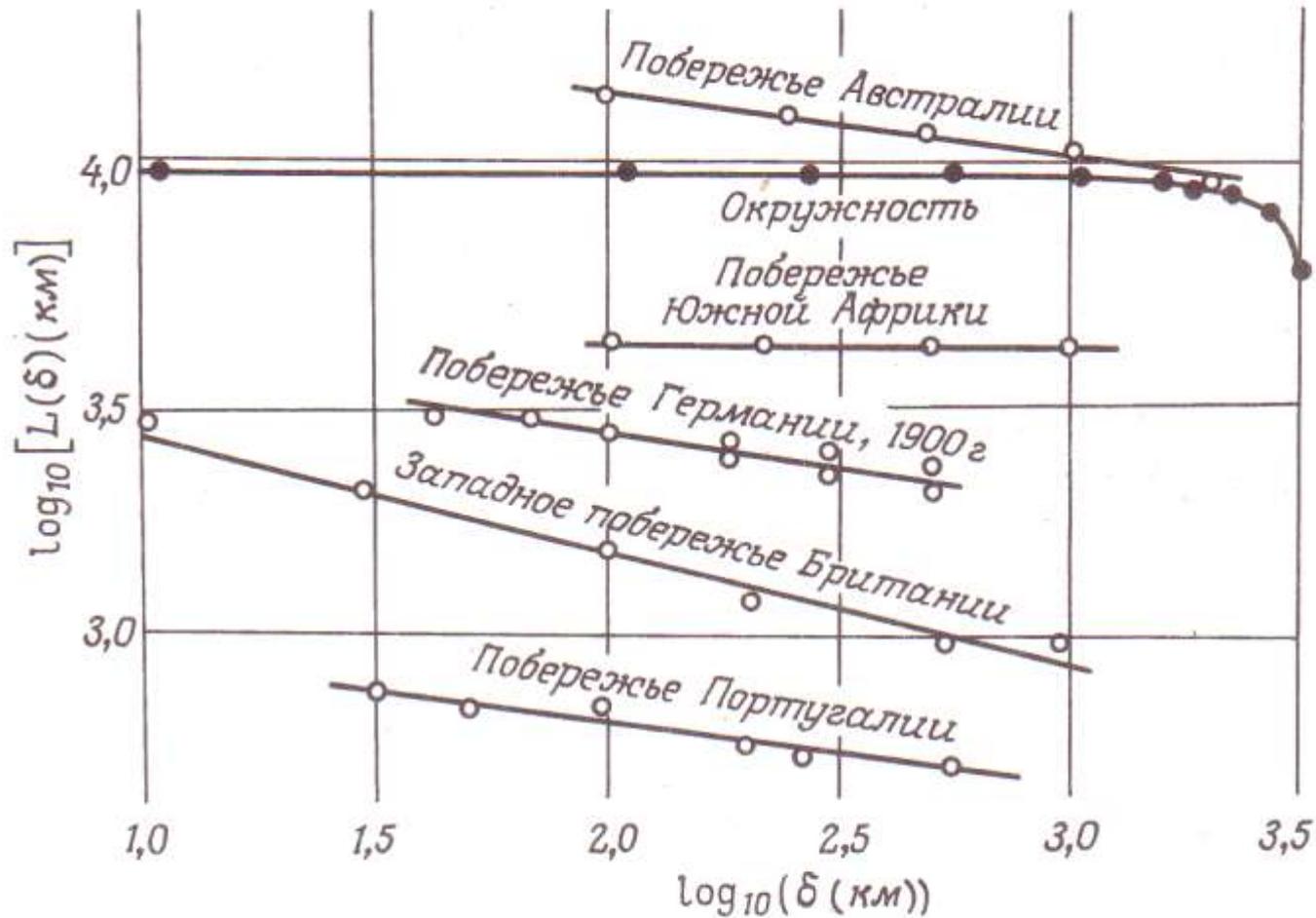
Феддер. Фракталы



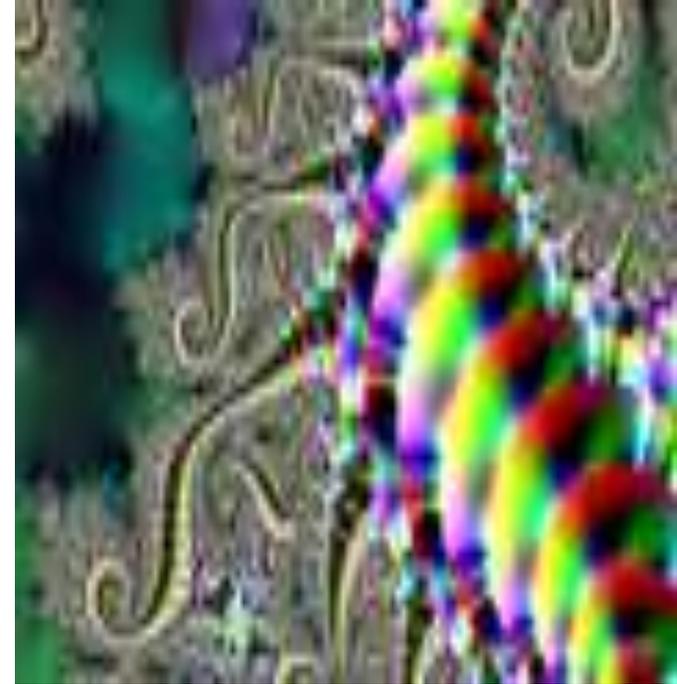
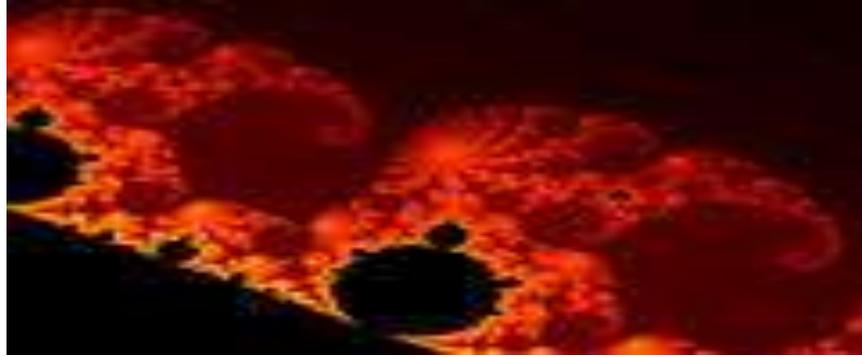
Б.Мандельброт. Фракталы и хаос.
Множество Мандельброта и другие
чудеса. Изд. РХД 2009

The Mandelbrot set and beyond.
Springer

Длина береговых линий



2. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км) [134].



Определение Фрактала

- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.
- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.
- Фракталы – множества точек, вложенные в пространство
- Топологическая размерность линии – 1, поверхности – 2, шара – 3



Фракталы. Размерность

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

$$\delta \rightarrow 0 \quad N(\delta) \sim 1/\delta^D$$

Для обычной кривой множитель a равен количеству отрезков: $a=L_N$, а показатель D равен единице.

Но для береговой линии Норвегии $D \sim 1,52$. Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.



Хаусдорф Феликс
(Hausdorff Felix,
1868-1942) –
немецкий
математик один из
основоположников
современной
топологии.

Писатель.
Псевдоним Поль
Монгре

Альвеолы человеческ ого легкого

Оптическая микроскопия – 80 кв. м

Электронная микроскопия –
140 кв. м

$D=2,17$



Мембраны

Субклеточные мембраны в клетках печени

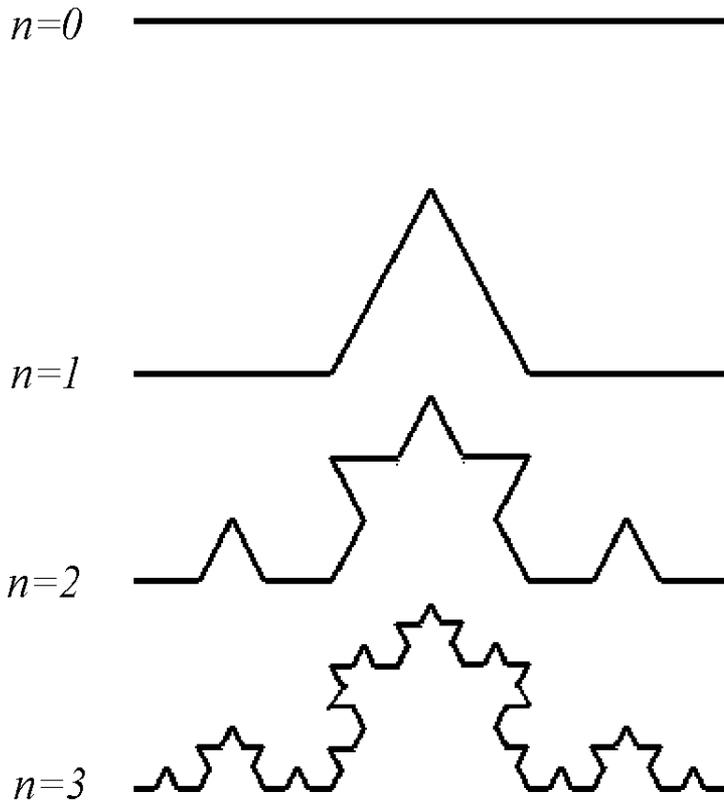
Внешние митохондриальные мембраны $D=2,09$

Внутренние митохондриальные мембраны $D=2,53$



Кривая Коха.

Первые четыре шага построения.



фон Кох Нильс Фабьян Хельге (1870-1924),

шведский математик, автор основополагающих работ по теории чисел

Длина кривой 1-го поколения

$L(1/3) = 4/3$. 4 звена, длина каждого – $1/3$

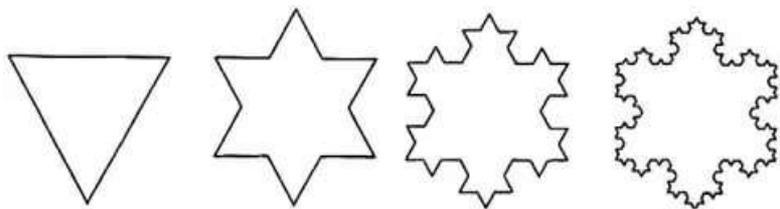
Длина кривой 2-го поколения.

Число звеньев: $N=4^2=16$, длина каждого – $1/9$

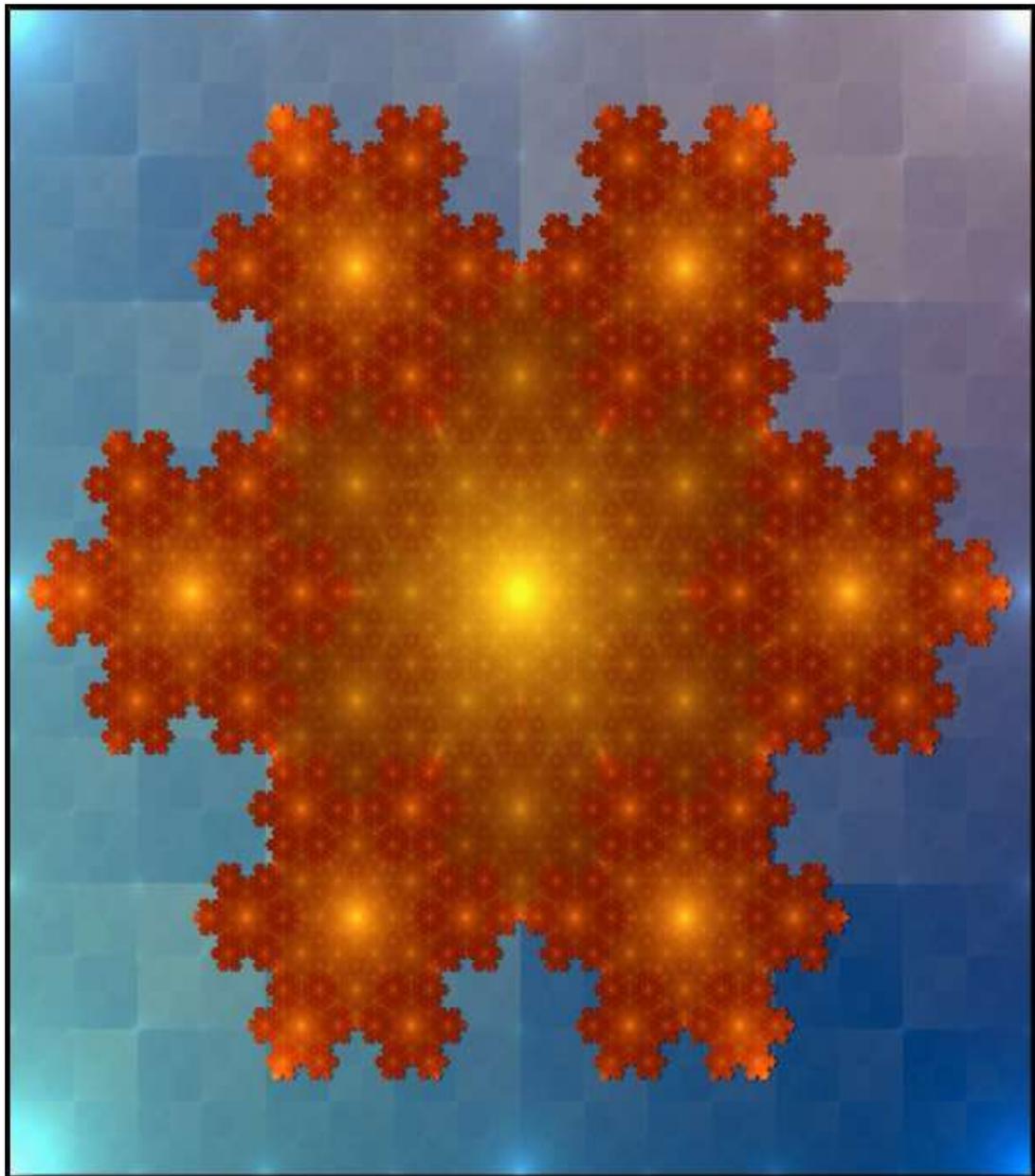
Длина каждого звена: $\delta=3^{-n}$

$n = -\ln \delta / \ln 3$

$L(\delta) = (4/3)^n = \delta^{1-D}$ $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$

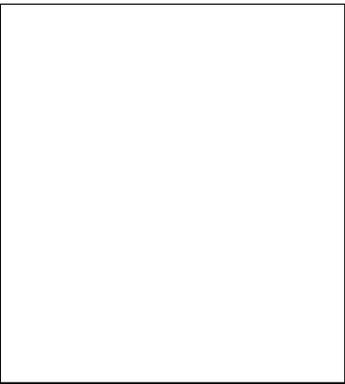


Снежинка Коха

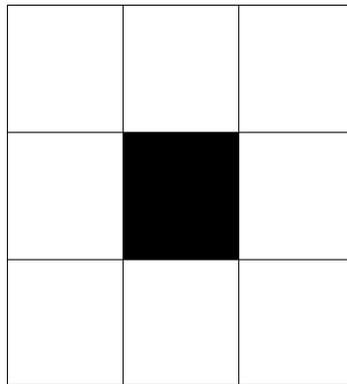


Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной $1/3$. Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной $1/3$ стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$

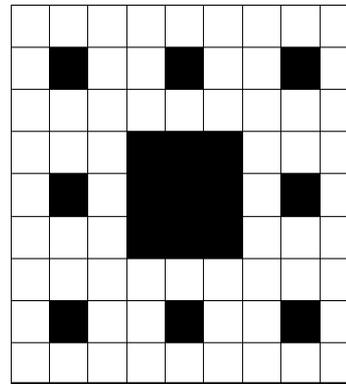
$n=0$



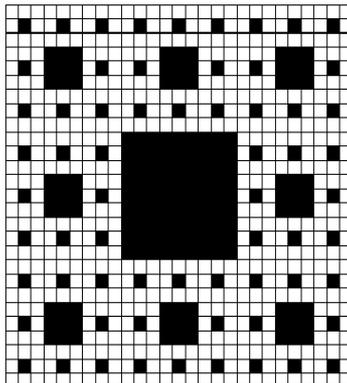
$n=1$



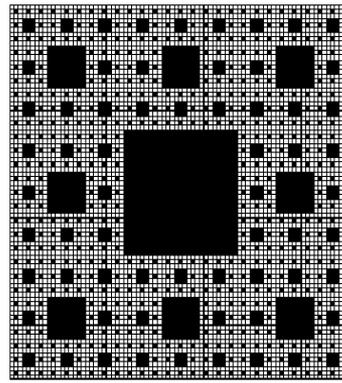
$n=2$



$n=3$



$n=4$



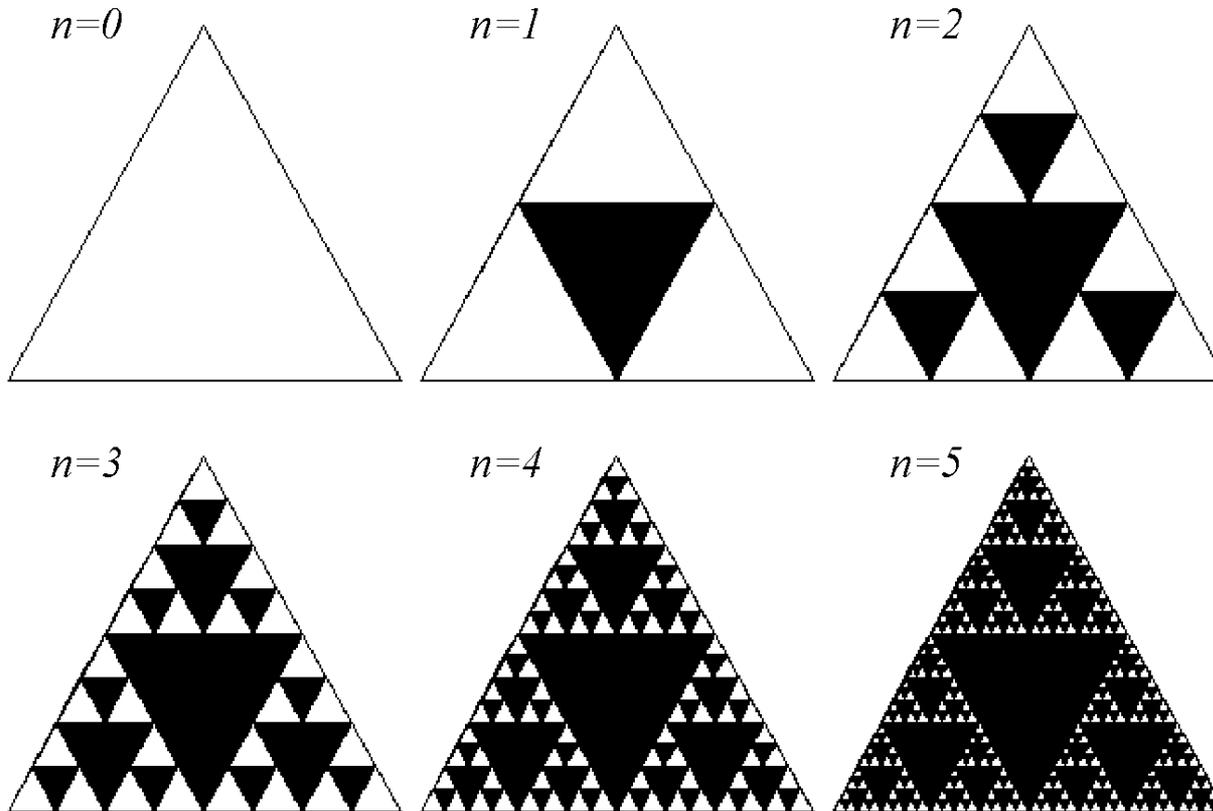
Вацлав Серпинский

(1882-1969)

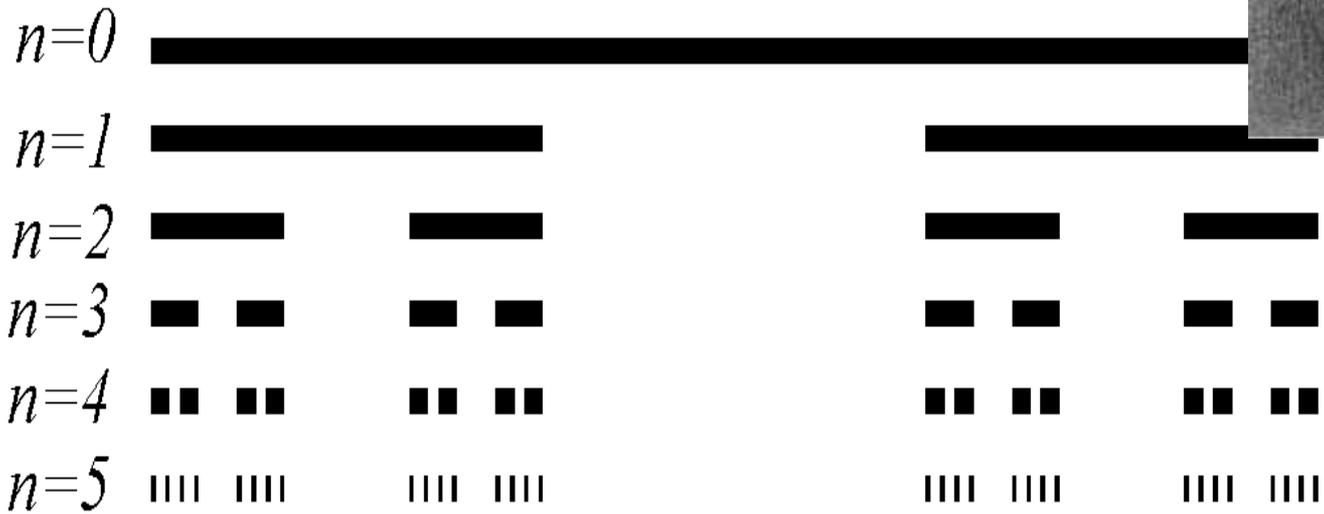
–польский математик.

Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$

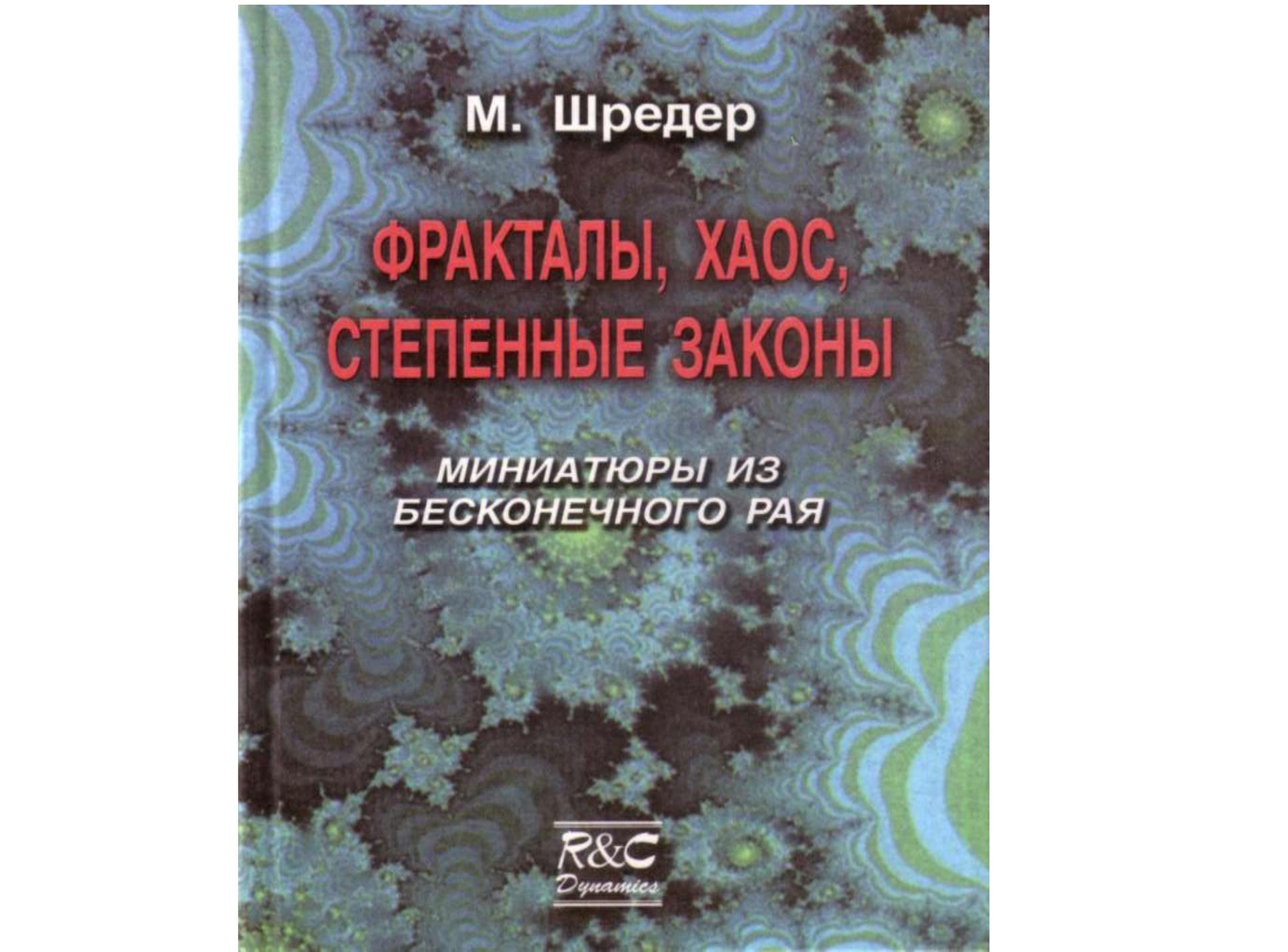


Канторово множество названо в честь великого математика Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г. Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение канторова множества сводится к выбрасыванию из первоначального отрезка все более мелких отрезков



Георг Кантор
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor,
 1845 (С.-Петербург) - 1918
 немецкий математик
 создатель теории множеств

Множество – это объединение определенных различных объектов, называемых элементами множества, в единое целое



М. Шредер

**ФРАКТАЛЫ, ХАОС,
СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ**

*МИНИАТЮРЫ ИЗ
БЕСКОНЕЧНОГО РАЯ*

R&C
Dynamics