

Семинар 8

Понятие автоколебаний. Предельные циклы. Рождение предельного цикла. Бифуркация Андронова–Хопфа. Мягкое и жесткое возбуждение колебаний.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Рассмотрим систему уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (8.1)$$

Если T ($T > 0$) — наименьшее число, для которого при всяком t выполняется $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$, то изменение переменных $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется периодическим изменением с периодом T .

Периодическому изменению соответствует замкнутая траектория на фазовой плоскости. Выделим сколь угодно малую область вокруг замкнутой траектории — ее ε -окрестность.

Предельным циклом называется изолированная замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой с внешней и внутренней стороны при $t \rightarrow +\infty$ (или при $t \rightarrow -\infty$) стремятся фазовые траектории, начинающиеся в ее ε -окрестности.

Предельный цикл называется **устойчивым**, если все фазовые траектории, начинающиеся в ε -окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$.

Если же, наоборот, в ε -окрестности предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$, то такой предельный

цикл называется **неустойчивым**. Такие циклы могут разделять области влияния (бассейны) разных притягивающих множеств.

Движения, отображаемые устойчивым предельным циклом, обладают следующими свойствами:

- а) устойчивость по отношению к малым возмущениям периодического движения;
- б) независимость периода и амплитуды движения от начальных условий.

РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА. БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА–ХОПФА

Существование предельных циклов возможно лишь в системе, правые части которой представлены нелинейными функциями. Напомним, что если в *линейной системе* корни характеристического уравнения комплексны, то есть имеют действительную и мнимую части, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ и $\operatorname{Im} \lambda_{1,2}$, то при изменении знака $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ (причем $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$) происходит смена устойчивости фокуса. Нулевым значениям действительной части характеристических чисел (ляпуновских показателей) соответствует особая точка типа центр (рис.8.1).

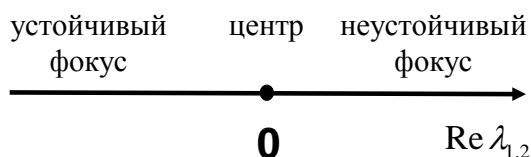


Рис. 8.1. Изменение устойчивости фокуса при изменении $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ в линейной системе ОДУ.

В нелинейной системе, где возможно рождение предельного цикла, выполнение условий $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$ соответствует **бифуркации Андронова–Хопфа** или бифуркации рождения предельного цикла. Существуют два типа бифуркации Андронова–

Хопфа, которые получили название *закритическая* (*суперкритическая*) бифуркация и *докритическая* (*субкритическая*) бифуркация.

ЗАКРИТИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ (МЯГКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ)

Рассмотрим модельную систему, представленную в полярных координатах r, φ (r — радиус, φ — угол), c — параметр.

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(c - r^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases} \quad (8.2)$$

Напомним, что монотонное решение $r(t)$, полученное в полярных координатах, будет соответствовать периодическому решению в декартовых координатах.

Решение $r = 0$ в полярных координатах соответствует точке в декартовых координатах (окружность с нулевым радиусом).

Решение $r = a$ ($a \neq 0$) в полярных координатах соответствует окружности (предельному циклу) в декартовых координатах с радиусом $r = a$.

Устойчивость (неустойчивость) особой точки в полярных координатах соответствует устойчивости (неустойчивости) цикла в декартовых координатах.

Итак, исследуем систему (8.2).

Стационарные состояния: $\bar{r}_1 = 0$, $\bar{r}_{2,3} = \pm\sqrt{c}$.

Поскольку r — это радиус, то реальный смысл имеют только неотрицательные действительные значения r : $\bar{r}_1 = 0$, $\bar{r}_2 = \sqrt{c}$.

\bar{r}_1 существует при любых значениях параметра c , \bar{r}_2 существует при $c \geq 0$.

Проведем линейный анализ устойчивости стационарных значений r . Производная правой части первого уравнения (8.2) по переменной r равна: $\frac{\partial P}{\partial r} = c - 3r^2$. Выражения для производной в стационарном состоянии и соответствующие параметрические диаграммы имеют следующий вид:

стационарное решение — точка	стационарное решение — предельный цикл
$\bar{r}_1 = 0$	$\bar{r}_2 = \sqrt{c}$
$\frac{\partial P}{\partial r} = c$	$\frac{\partial P}{\partial r} = -2c$
<p>устойчивый фокус центр неустойчивый фокус</p>	<p>устойчивый центр предельный цикл</p>

ЗАДАНИЕ 8.1.

Изучение мягкого возбуждения автоколебаний.

Запишем систему 8.2 в декартовых координатах. Сделаем замену переменных: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$. Получим:

$$\begin{cases} x' = x(c - (x^2 + y^2)) - 2\pi y, \\ y' = y(c - (x^2 + y^2)) + 2\pi x. \end{cases} \quad (8.3)$$

В программе для решения ОДУ постройте фазовые портреты системы (8.3) при разных значениях параметра c и разных начальных условиях.

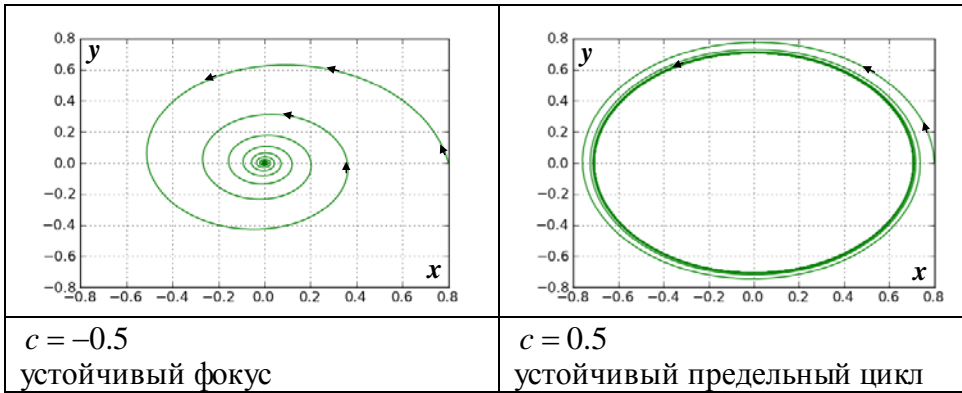


Рис. 8.3. Пример фазовых портретов системы (8.3) при изменении параметра c .

Возникновение предельного цикла и увеличение амплитуды с ростом параметра c в системе (8.2) можно представить на фазо-параметрической диаграмме (рис. 8.2).

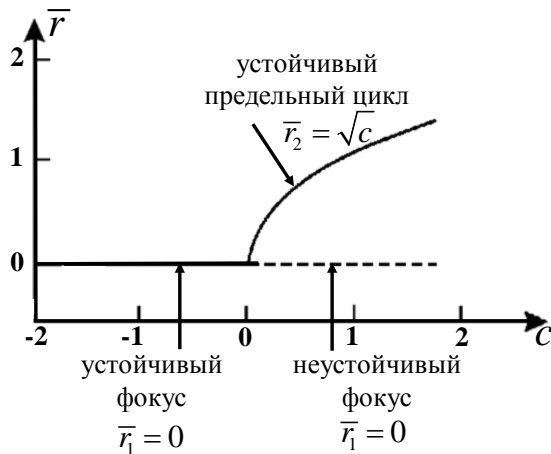


Рис. 8.2. Фазо-параметрическая диаграмма для модели (8.2). Закритическая (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа. Мягкое возбуждение автоколебаний.

Рассмотрим, что происходит в системе, если двигаться по параметру c , начиная с отрицательных значений (рис.8.2).

Первоначально имеется единственное устойчивое стационарное состояние $\bar{r}_1 = 0$, устойчивый фокус.

При $c > 0$ точка $\bar{r}_1 = 0$ становится неустойчивым фокусом, и в системе возникает предельный цикл с радиусом $\bar{r}_2 = \sqrt{c}$, который растет пропорционально \sqrt{c} .

ДОКРИТИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ (ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ)

Рассмотрим модельную систему, описывающую рождение предельного цикла при жестком возбуждении. В полярных координатах, где r , φ (r — радиус, φ — угол), c — параметр, система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(c + 2r^2 - r^4), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases} \quad (8.4)$$

Приравняв правую часть первого уравнения нулю, получим следующие стационарные значения радиуса r :

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= 0, \\ \bar{r}_{2,3} &= \sqrt{1 \pm \sqrt{1+c}}, \\ \bar{r}_{4,5} &= -\sqrt{1 \pm \sqrt{1+c}}. \end{aligned}$$

Физический смысл имеют лишь неотрицательные действительные значения r : $\bar{r}_1 = 0$, $\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1+c}}$, $\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1+c}}$.

\bar{r}_1 существует при любых значениях параметра c , \bar{r}_2 существует при $-1 \leq c \leq 0$ и \bar{r}_3 существуют при $c \geq -1$.

Проведем линейный анализ устойчивости стационарных значений r . Производная правой части первого уравнения системы (8.4) по переменной r равна:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = c + 6r^2 - 5r^4.$$

Выражения для производной в каждом стационарном состоянии и соответствующие параметрические диаграммы имеют следующий вид:

стационарное решение — точка	стационарное решение — предельный цикл	стационарное решение — предельный цикл
$\bar{r}_1 = 0$	$\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + c}}$	$\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + c}}$
$\frac{\partial P}{\partial r} = c$	$\frac{\partial P}{\partial r} = 4 \cdot \sqrt{1 + c} \cdot (1 - \sqrt{1 + c})$	$\frac{\partial P}{\partial r} = -4 \cdot \sqrt{1 + c} \cdot (1 + \sqrt{1 + c})$
		

ЗАДАНИЕ 8.2.

Изучение жесткого возбуждения автоколебаний.

Запишем систему 8.4 в декартовых координатах. Сделаем замену переменных: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$, получим:

$$\begin{cases} x' = x(c + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2) - 2\pi y, \\ y' = y(c + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2) + 2\pi x. \end{cases} \quad (8.5)$$

В программе для решения ОДУ постройте фазовые портреты системы 8.5 при разных значениях параметра c .

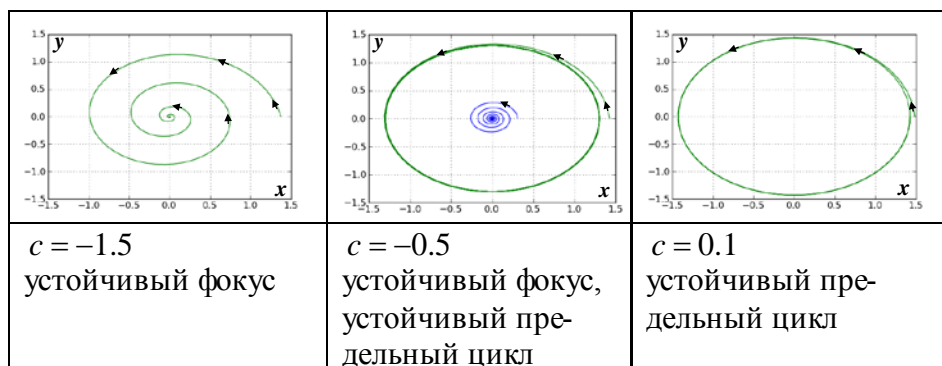


Рис. 8.5. Пример фазовых портретов системы (8.5) при изменении параметра c .

Рассмотрим, что происходит в системе, если двигаться по параметру c , начиная с отрицательных значений (рис. 8.4).

При $c < -1$ в системе существует единственное устойчивое стационарное решение $\bar{r}_1 = 0$, устойчивый фокус.

При $-1 < c < 0$ в системе существуют два устойчивых решения: устойчивый фокус $\bar{r}_1 = 0$ и устойчивый предельный цикл

$\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + c}}$. Их бассейны притяжения разделяет неустойчивый

предельный цикл $\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + c}}$. (Неустойчивые решения изображены пунктиром). В зависимости от начальных условий фазовые траектории либо скручиваются в устойчивый фокус, либо наматываются на устойчивый предельный цикл (сравните с силовым переключением триггера, семинар 6).

При $c = 0$ неустойчивый предельный цикл сливается с устойчивым фокусом, точка $\bar{r}_1 = 0$ теряет устойчивость и становится неустойчивым фокусом.

Если изображающая точка находилась в области влияния устойчивого фокуса, то при смене устойчивости происходит резкий скачок к устойчивому предельному циклу (сравните с параметрическим переключением триггера, семинар 6).

Если двигаться от положительных значений c к отрица-

тельными, колебания большой амплитуды сохраняются до тех пор, пока c не станет меньше -1 , а затем внезапно исчезнут.

Таким образом, при $-1 < c < 0$ могут существовать два устойчивых режима, устойчивый фокус и устойчивый предельный цикл. Какой из них реализуется, зависит от предыстории системы. Как указывалось в семинаре 6, такой феномен называется *гистерезисом*.

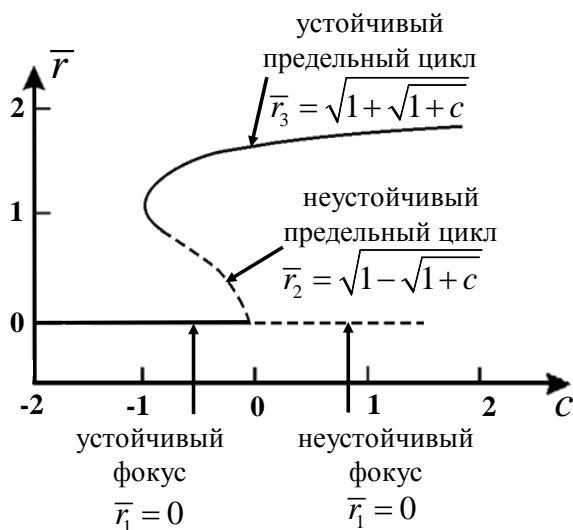


Рис. 8.4. Фазопараметрическая диаграмма для модели (8.4). Докритическая (субкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа. Жесткое возбуждение автоколебаний.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается предельный цикл от центра?
2. Чем отличаются сценарии мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний?
3. Сколько устойчивых режимов одновременно может реализоваться в системе с жестким возбуждением автоколебаний?
4. Каким образом можно прекратить колебания в системе с жестким возбуждением автоколебаний (сравнить с силовым и параметрическим переключением триггера)?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 8

8.1. Модельная система, демонстрирующая докритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, может быть описана в *полярных координатах* системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(a - 1 + 2r^2 - r^4), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases}$$

Здесь r — радиус, φ — угол, a — параметр, от которого зависит длина радиуса.

Найдите все решения модели. Проведите линейный анализ и определите тип каждого из найденных решений в зависимости от a .

Постройте параметрическую диаграмму с указанием всех типов решения в каждой найденной области параметра a .

Постройте фазовый портрет системы при $a = 0.5$ в *декартовых координатах*, имея в виду, что решение «предельный цикл» в декартовых координатах будет окружностью с центром в начале координат и радиусом, определяемым из выражений для стационарных состояний в системе в полярных координатах. Устойчивые решения изобразите сплошной линией, а неустойчивые — пунктиром.

8.2. Простейшим классическим примером существования автоколебаний в системе химических реакций является *модель брюсселятор*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A + x^2 y - (B + 1)x, \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2 y. \end{cases}$$

Здесь x и y — безразмерные концентрации реагентов, A и B — сочетания констант элементарных химических стадий.

Найдите стационарное состояние модели. Проведите линейный анализ и исследуйте, как зависит тип стационарного состояния от соотношения параметров A и B .

Постройте параметрическую диаграмму, указывая типы стационарного состояния для различных областей B . Какие устойчивые и неустойчивые решения могут реализоваться в модели брюсселятор? При каком значении B происходит критическая бифуркация Андронова–Хопфа?

8.3. Модель гликолиза в безразмерном виде может иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \frac{dy}{dt} = 2y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right). \end{cases}$$

Здесь x и y — безразмерные концентрации метаболитов гликолиза, фруктозы-6-фосфат (Ф6Ф) и фруктозы дифосфат (ФДФ) соответственно, r — параметр, пропорциональный скорости притока Ф6Ф в сферу реакции.

Найдите стационарное состояние модели. Проводя линейный анализ, исследуйте, как зависит тип стационарного состояния от скорости притока Ф6Ф в сферу реакции r . Постройте параметрическую диаграмму, указывая типы стационарного состояния для различных областей r . При каком значении r происходит критическая бифуркация Андронова–Хопфа? Опишите, какие динамические режимы возникают при увеличении r от 0.5 до 1.5.

8.4. Пусть характеристические уравнения для модели I и для модели II имеют вид:

I. $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \sigma < 0, \Delta > 0.$

II. $p^2 - \sigma^1 p + \Delta^1 = 0.$

Параметры модели I связаны с параметрами модели II следующим образом:

$$\sigma^1 = \sigma - A, \Delta^1 = \Delta - B \quad (A > 0, B > 0).$$

Используя бифуркационную диаграмму для характеристического уравнения (семинар 4), определите:

- 1) какие типы стационарных состояний возможны в модели I;
- 2) при каких значениях параметров A и B в модели II возможна неустойчивость.