

## СЕМИНАР 4

*Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Характеристическое уравнение. Устойчивость по Ляпунову. Типы особых точек. Бифуркационная диаграмма. Построение фазовых кинетических портретов.*

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

**Решением** системы двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений является любая пара дифференцируемых функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ , удовлетворяющих этой системе.

**Фазовой плоскостью** называется плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных  $x$  и  $y$ , каждая точка плоскости соответствует определенному состоянию системы.

Совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$  согласно заданным уравнениям исследуемой системы, называется **фазовой траекторией**.

Точка  $(\bar{x}, \bar{y})$ , в которой производные по времени переменных  $x$  и  $y$  одновременно обращаются в ноль, является **особой точкой (стационарным состоянием системы)**.

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Совокупность фазовых траекторий дает **фазовый портрет** системы. Через любую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория.

Построение фазового портрета позволяет сделать выводы о характере изменений переменных  $x$  и  $y$  *без знания аналитических решений исходной системы уравнений*. Выражение, задающее фазовые траектории, можно получить в аналитическом виде. Разделим второе из уравнений системы (4.1) на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (4.2)$$

Решение этого уравнения  $y = y(x, c)$ , или в неявном виде  $F(x, y) = c$ , где  $c$  — постоянная интегрирования, дает семейство интегральных кривых уравнения (4.2) — фазовых траекторий системы (4.1) на плоскости  $XOY$ .

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим характер поведения переменных при некотором небольшом отклонении системы от стационарного состояния  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Введем новые переменные  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ , определив их как смещения относительно стационарных значений переменных:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \xi, \\ y &= \bar{y} + \eta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставив эти выражения в (4.1), получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta). \end{cases} \quad (4.4)$$

Так как  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — координаты особой точки, то  $\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dt} = 0$ , тогда система уравнений относительно  $\xi$  и  $\eta$  будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta). \end{cases} \quad (4.5)$$

Предположим, что функции  $P$  и  $Q$  непрерывны и имеют  $n$ -е производные в точке  $(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$ . Тогда мы можем разложить правые части уравнений (4.5) в ряд Тейлора по переменным  $\xi, \eta$  в окрестности точки  $(\xi_0, \eta_0)$ :

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x}, \bar{y}) + a\xi + b\eta + (p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots), \\ \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x}, \bar{y}) + c\xi + d\eta + (q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots), \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}), \quad c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}). \quad (4.7)$$

Учтем, что по определению особой точки

$$\begin{cases} P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \\ Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Отбросим в уравнениях (4.6) нелинейные члены (мы можем это сделать в малой окрестности особой точки, см. семинар 1 и приложение 1). Получим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которая называется **линеаризованной системой**, или системой первого приближения:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \end{cases} \quad (4.8)$$

Поведение решений  $\xi(t), \eta(t)$  системы (4.8) вблизи нулевой точки  $(0, 0)$  будет полностью совпадать с поведением решений  $x(t), y(t)$  системы (4.1) вблизи стационарного состояния  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Характеристической матрицей линейного оператора (4.8) называется матрица вида  $\begin{pmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{pmatrix}$ .

Линейная система двух дифференциальных уравнений (4.8) может иметь нетривиальное решение, если определитель характеристической матрицы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.9)$$

Раскрывая определитель (4.9), получаем *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0. \quad (4.10)$$

Корни уравнения (4.10) называются *собственными числами* определителя (4.9), или *показателями Ляпунова*:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}. \quad (4.11)$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ЛЯПУНОВА

Как было сказано выше, решение системы первого приближения (4.8) в окрестности точки (0,0) определяет поведение фазовых траекторий исходной системы (4.1) в окрестности стационарного состояния  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Общее решение линейной системы (4.8) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} \xi(t) = C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{12}e^{\lambda_2 t}, \\ \eta(t) = C_{21}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Свойства функций  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  зависят от значений параметров — характеристических чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Действительные показатели экспоненциальной функции задают ее монотонное пове-

дение, а комплексно-сопряженные — колебательное (подробный анализ решения линейной системы приведен в приложении 4).

Если оба корня (4.11) имеют отрицательную действительную часть ( $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$ ) и, следовательно, все решения уравнений первого приближения (4.8) стремятся к 0 (заданные отклонения затухают), то **стационарное состояние устойчиво**, причем **асимптотически устойчиво**. Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть ( $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$  или  $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ ), то есть система (4.8) имеет нарастающие решения, то **стационарное состояние неустойчиво**. Если действительные части одного или обоих корней характеристического уравнения равны нулю ( $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$  и/или  $\operatorname{Re} \lambda_2 = 0$ ), то критерий Ляпунова не дает ответа на вопрос об асимптотической устойчивости, и тогда необходимо использовать другие методы определения устойчивости.

## ТИПЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК И БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА

Проанализируем возможные типы стационарного состояния системы (4.8) в зависимости от значений ее показателей Ляпунова.

Итак, характеристические числа могут быть действительными или комплексно-сопряженными.

Введем обозначения:

$$\sigma = (a + d), \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

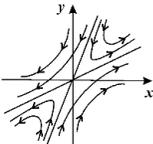
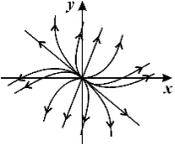
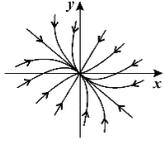
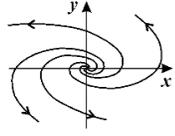
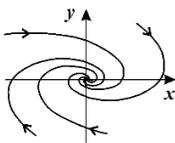
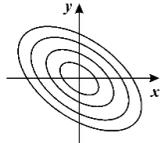
Тогда характеристическое уравнение (4.10) запишется в виде

$$\lambda^2 - \sigma \lambda + \Delta = 0. \quad (4.13)$$

Рассмотрим плоскость  $\sigma(\Delta)$  и отметим на ней области, соответствующие тому или иному типу стационарного состояния, который определяется значениями корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (4.14)$$

Выделим следующие случаи (см. таблицу):

Тип особой точки	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$	Фазовый портрет	Тип траекторий*
1) <b>Седло.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\Delta < 0$		Гиперболы
2) <b>Неустойчивый узел.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные, $\lambda_{1,2} > 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma > 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta > 0 \end{cases}$		Параболы
3) <b>Устойчивый узел.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные, $\lambda_{1,2} < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma < 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta > 0 \end{cases}$		Параболы
4) <b>Неустойчивый фокус.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексные, $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma > 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta < 0 \end{cases}$		Спирали
5) <b>Устойчивый фокус.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексные, $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma < 0 \\ \sigma^2 - 4\Delta < 0 \end{cases}$		Спирали
6) <b>Центр.</b> $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексные, $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0, \text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$		Концентрические эллипсы

\* Для уравнений канонического вида, к которому всегда можно привести систему (4.8) (см. лекцию 4 в учебнике Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии).

Объединяя рассмотренные случаи, получим бифуркационную диаграмму, которая разбивает плоскость параметров  $\sigma(\Delta)$  на области, соответствующие различным типам стационарного состояния (рис. 4.1).

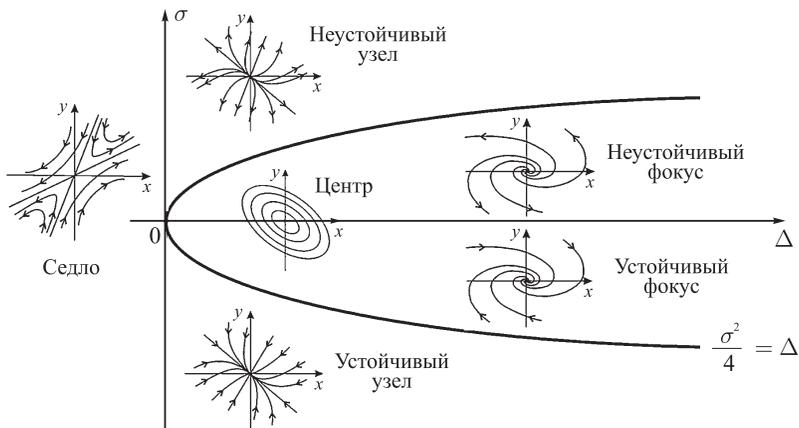


Рис. 4.1. Бифуркационная диаграмма для системы линейных уравнений (4.8)

Варианты 1–5 описывают так называемые **грубые состояния равновесия**. Вариант 6 — особая точка типа «центр», **негрубое состояние равновесия**. Характеристическое уравнение для этой точки имеет чисто мнимые корни, а фазовые траектории в окрестности стационарного состояния имеют вид концентрических эллипсов. Отклонение от стационарного состояния приводит к движению изображающей точки по другой эллиптической траектории, со временем отклонение не затухает, но и не увеличивается. Таким образом, особая точка типа «центр» является устойчивой, но не асимптотически устойчивой.

## МЕТОД ИЗОКЛИН

К любой интегральной кривой на фазовой плоскости можно провести касательную в произвольной точке этой кривой. Если ка-

сательные, построенные к разным точкам на различных фазовых траекториях, пересекают некоторую кривую под одним углом, то такая кривая называется **изоклиной** касательных. Построение изоклин касательных можно использовать для изображения фазового портрета, не прибегая к компьютерным вычислениям. **Уравнение изоклины** выводится из соотношения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = A = \text{const}. \quad (4.15)$$

В уравнении (4.15) константа  $A$  есть тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной к фазовой траектории  $A = \text{tg } \alpha$ .

Кривая, которую касательные к фазовым траекториям пересекают под углом  $\alpha = 0^\circ$ , называется **изоклиной горизонтальных касательных**. Для изоклины горизонтальных касательных уравнение (4.15) принимает вид

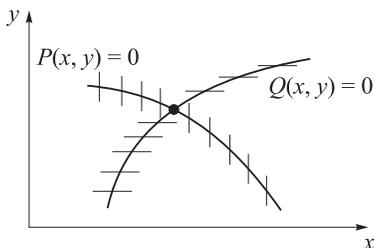
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \text{tg } 0^\circ = 0, \quad \text{или} \quad Q(x, y) = 0.$$

Кривая, которую касательные к фазовым траекториям, пересекают под углом  $\alpha = 90^\circ$ , называется **изоклиной вертикальных касательных**. Для изоклины вертикальных касательных уравнение (4.15) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \text{tg } 90^\circ = \infty, \quad \text{или} \quad P(x, y) = 0.$$

Изоклины вертикальных и горизонтальных касательных образуют **главные изоклины** (нуль-изоклины), они пересекаются в особой точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  (рис. 4.2).

В линейных (линеаризованных) системах вида (4.8) изоклины являются прямыми линиями, в нелинейных системах вида (4.1) — могут быть произвольными кривыми, задаваемыми уравнениями системы.



**Рис. 4.2.** Главные изоклины,  $P(x, y) = 0$  — изоклина вертикальных касательных,  $Q(x, y) = 0$  — изоклина горизонтальных касательных

### УРАВНЕНИЯ СЕПАРАТРИС

Важными элементами фазового портрета особых точек типа «седло» и «узел» являются две *сепаратрисы*. Эти прямые всегда направлены вдоль *собственных векторов* матрицы коэффициентов линейных (линеаризованных) уравнений системы. Они являются асимптотами для остальных фазовых траекторий.

Напомним, что собственным вектором матрицы  $M$ , соответствующим собственному числу  $\lambda$ , называется любой отличный от нуля вектор  $\vec{v}$ , который удовлетворяет уравнению  $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Собственные вектора системы (4.8) задаются выражением  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ . Отсюда получаем уравнения сепаратрис для линейной системы (4.8), пересекающихся в точке  $(0, 0)$ :

$$1) (a - \lambda_{1,2}) \cdot \xi + b \cdot \eta = 0$$

или

$$2) c \cdot \xi + (d - \lambda_{1,2}) \cdot \eta = 0,$$

где  $\lambda_{1,2}$  — собственные значения матрицы коэффициентов линейной (линеаризованной) системы.

Вспомним, что  $\xi = (x - \bar{x})$ ,  $\eta = (y - \bar{y})$ . Подставляя эти выражения в 1) и 2), получим уравнения сепаратрис, пересекающихся в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ :

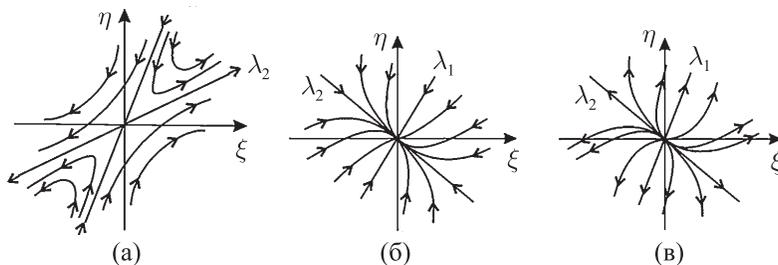
$$1) (a - \lambda_{1,2}) \cdot (x - \bar{x}) + b \cdot (y - \bar{y}) = 0$$

или

$$2) c \cdot (x - \bar{x}) + (d - \lambda_{1,2}) \cdot (y - \bar{y}) = 0.$$

Одному значению  $\lambda$  соответствует одна прямая. Если в выражениях 1) и 2) коэффициенты при  $(x - \bar{x})$  и  $(y - \bar{y})$  (и аналогично при  $\xi$  и  $\eta$ ) не равны нулю, то выражения 1) и 2) совпадают и задают одну и ту же прямую.

Рассмотрим особую точку **седло**.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — действительные, разных знаков. Если сепаратриса связана с отрицательным собственным значением  $\lambda_1 < 0$ , то движение вдоль нее происходит по направлению к особой точке. И наоборот, вдоль сепаратрисы, соответствующей  $\lambda_2 > 0$ , движение направлено от особой точки (рис. 4.3,а). Остальные траектории (гиперболы для канонической системы, см. лекцию 4) выстраиваются между сепаратрисами, их направление определяется в соответствии с направлением движения по сепаратрисам (рис. 4.3,а).



**Рис. 4.3.** Расположение фазовых траекторий относительно сепаратрис для особых точек типа «седло»,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  (а), «устойчивый узел»,  $\lambda_{1,2} < 0$ ,  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$  (б), «неустойчивый узел»,  $\lambda_{1,2} > 0$ ,  $\lambda_2 < \lambda_1$  (в)

В случае особой точки **узел**  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — действительные, одного знака. Движение вдоль обеих сепаратрис происходит одинаково: по направлению к особой точке (если узел устойчивый), от особой точ-

ки (если узел неустойчивый). Пусть  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ , тогда остальные траектории (параболы для канонической системы, см. лекцию 4) выстраиваются относительно сепаратрис так, как на рис. 4.3,б,в, их направление определяется устойчивостью или неустойчивостью узла.

Напомним, что решение системы первого приближения (4.8) в окрестности  $(0, 0)$  определяет поведение фазовых траекторий исходной системы (4.1) в окрестности стационарного состояния  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Поэтому сепаратрисы для особой точки системы (4.1) можно получить параллельным переносом из точки  $(0, 0)$  в точку  $(\bar{x}, \bar{y})$  сепаратрис, построенных для системы (4.8). В линейных (линеаризованных) системах вида (4.8) сепаратрисы являются прямыми линиями, в нелинейных вида (4.1) — могут быть произвольными кривыми, задаваемыми уравнениями системы.

В заключение этого раздела вернемся к исходной системе уравнений (4.1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases}$$

В общем случае функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются нелинейными, система может иметь несколько стационарных состояний с разными типами устойчивости. Линейный анализ отклонений дает представление о поведении фазовых траекторий только в малой окрестности стационарного состояния. Вдали от него траектории могут довольно сильно отличаться по форме. Так, замкнутая траектория вокруг точки типа «центр» может отличаться от эллипса и принимать форму, например, близкую к треугольной и т. п.

Напомним, что коэффициенты линейной системы (4.8)  $a, b, c, d$  вычисляются как соответствующие частные производные правых частей исходных нелинейных уравнений и являются комбинациями параметров исходной модели (4.1). При изменении какого-либо параметра исходной нелинейной модели будет меняться и ко-

эффиценты соответствующей линейной системы; следовательно, будут меняться величины  $\sigma$ ,  $\Delta$  на рис. 4.1. При переходе через оси координат бифуркационной диаграммы характер фазового портрета качественно меняется. Поэтому такие границы называются бифуркационными — по разные стороны от границы система имеет два качественно различных фазовых портрета и, соответственно, два разных типа поведения.

Нужно отметить, что бифуркационными являются только переходы через оси координат, поскольку невозможно постепенным непрерывным изменением фазового портрета перейти, например, от узла к седлу или от неустойчивого фокуса к устойчивому. Переходы «устойчивый узел – устойчивый фокус» («неустойчивый узел – неустойчивый фокус») не являются бифуркационными, поскольку можно постепенным непрерывным изменением фазового портрета перейти от узла к фокусу.

В следующих семинарах будет проведен анализ нелинейных систем уравнений, их фазовых портретов и бифуркационных переходов.

## **ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ФАЗОВЫХ И КИНЕТИЧЕСКИХ ПОРТРЕТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

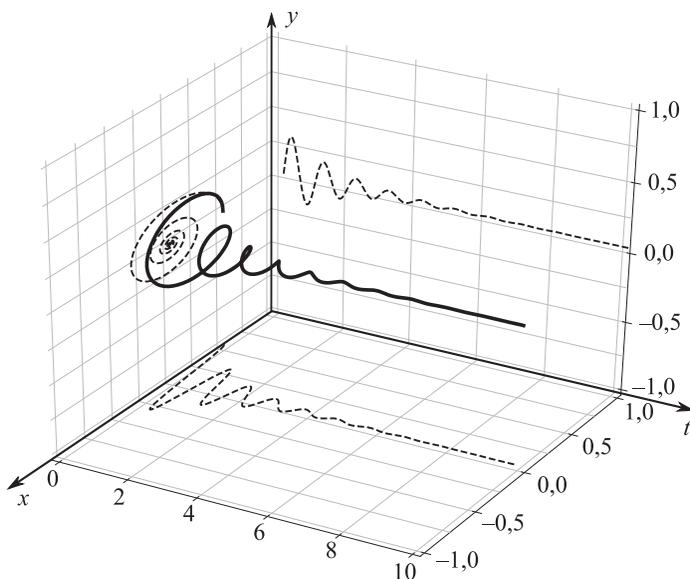
Часто при исследовании модели возникает необходимость получить приблизительный вид поведения решений вблизи стационарного состояния, не прибегая к детальным компьютерным вычислениям.

Рассмотрим примеры построения эскизов фазовых и кинетических портретов в окрестности нулевого стационарного состояния  $(0, 0)$  для различных линейных систем (подробнее о координатах особой точки системы линейных уравнений см. в приложении 4).

Решение системы двух автономных дифференциальных уравнений может быть представлено кривой в трехмерном пространстве

$(x, y, t)$  с начальными условиями  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  (рис. 4.4). Будем называть графики решений  $x(t)$  и  $y(t)$  **кинетическими кривыми**. Аналогично **фазовому портрету** совокупность кинетических кривых будем называть **кинетическим портретом**.

Фазовые и кинетические портреты являются проекциями таких решений соответственно на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, t)$ ,  $(y, t)$ .



**Рис. 4.4.** Трехмерный график решения системы двух автономных дифференциальных уравнений (сплошная кривая) и его проекции на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, t)$  и  $(y, t)$  (пунктирные кривые). Проекция на плоскость  $(x, y)$  — фазовый портрет системы, проекции на плоскости  $(x, t)$  и  $(y, t)$  — кинетические кривые. Особая точка типа «устойчивый фокус»

Для получения эскизов фазовых и кинетических портретов будем следовать следующему плану:

- 1) определение типа стационарного состояния;
- 2) построение главных и дополнительных (если потребуется) изоклин системы;

3) построение сепаратрис (для особых точек типа «узел» и «седло»);

4) построение траекторий на фазовой плоскости;

5) определение направления движения изображающей точки;

6) построение кинетических кривых по фазовому портрету.

При построении кинетических кривых по фазовым траекториям важным вопросом является выбор масштаба по оси времени. На фазовой плоскости время в явном виде не присутствует, скорость движения изображающей точки по этой траектории не отображается. Таким образом, при построении кинетических кривых по фазовой траектории временной масштаб задается произвольно, и мы получаем не количественное, а качественное описание хода кривой во времени.

**Пример 1.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases} \quad (4.16)$$

1. Коэффициенты линеаризации:  $a=1$ ,  $b=-4$ ,  $c=1$ ,  $d=-1$ . Определим тип стационарного состояния, вычисляя корни характеристического уравнения.

$$\sigma = (a + d) = (1 - 1) = 0,$$

$$\Delta = ad - bc = 1 \cdot (-1) - (-4) \cdot (1) = 3.$$

По бифуркационной диаграмме (рис. 4.1) определяем, что особая точка — *центр*.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 3}}{2} = \pm i\sqrt{3}.$$

Корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми:  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ , что подтверждает, что особая точка системы (4.16) — *центр*.

2. Уравнение изоклины горизонтальных касательных находим из второго уравнения системы (4.16):  $y = x$ ; уравнение изоклины вертикальных касательных — из первого:  $y = \frac{1}{4}x$ .

Найдем углы пересечения касательных к фазовым траекториям с осями координат, воспользовавшись уравнением изоклин (4.15).

Для оси абсцисс, подставляя  $y = 0$ :  $\frac{x-0}{x-4 \cdot 0} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Для оси ординат, подставляя  $x = 0$ :  $\frac{0-y}{0-4 \cdot y} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha \approx 14^\circ$ .

Таким образом, ось абсцисс является изоклиной, которая пересекает касательные к траекториям под углом  $45^\circ$ , а ось ординат является изоклиной, которая пересекает касательные к траекториям под углом  $\sim 14^\circ$ .

3. Сепаратрисы у центра отсутствуют.

4. Фазовым портретом являются вложенные друг в друга концентрические эллипсы.

5. Определим направление движения по найденным траекториям. Выберем точку, например,  $(1, 1)$ . Подставим координаты этой точки в систему уравнений. Получим выражения для скоростей изменения переменных  $x, y$  в этой точке:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получившиеся значения показывают, что скорость изменения переменной  $x$  отрицательная, то есть значение переменной  $x$  должно

уменьшаться, тогда как скорость изменения переменной  $y$  равна нулю, то есть, значение переменной  $y$  не меняется. Отметим полученное направление стрелкой. Таким образом, в рассматриваемом примере движение по фазовым траекториям направлено против часовой стрелки (рис. 4.5,а).

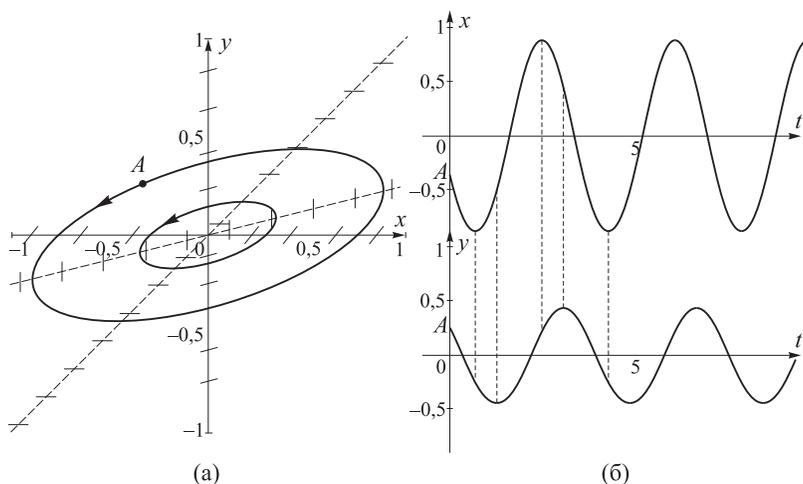


Рис. 4.5. Фазовый (а) и кинетический (б) портреты системы (4.16)

6. Построим кинетические кривые. Выберем на фазовой плоскости произвольную точку  $A$ . Это начальная точка, соответствующая моменту времени  $t = 0$ . Будем отслеживать поведение переменных  $x$  и  $y$  по выбранной фазовой траектории и отображать его на координатных плоскостях  $(x, t)$  и  $(y, t)$  в едином масштабе по оси времени. Стартуя из точки  $A$ , мы должны двигаться против часовой стрелки, координаты  $x$  и  $y$  уменьшаются. Координата  $y$  проходит через 0, значение  $x$  при этом отрицательно. Далее координаты  $x$  и  $y$  продолжают уменьшаться. Величина  $x$  достигает минимального значения на изоклине вертикальных касательных, затем начинает увеличиваться. Величина  $y$  достигает своего минимального значения на изоклине горизонтальных касательных (значение  $x$  в этот

момент времени отрицательно). Далее и величина  $x$ , и величина  $y$  увеличиваются, достигая своих максимальных значений соответственно на изоклинах вертикальных и горизонтальных касательных, и возвращаются к начальным значениям (рис. 4.5,б).

**Пример 2.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases} \quad (4.17)$$

1. Коэффициенты линеаризации:  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=1$ ,  $d=2$ . Определим тип стационарного состояния, вычисляя корни характеристического уравнения.

$$\sigma = (a + d) = (1 + 2) = 3,$$

$$\Delta = ad - bc = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2.$$

По бифуркационной диаграмме (рис. 4.1) определяем, что особая точка неустойчива и является либо узлом, либо фокусом.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

Корни характеристического уравнения ( $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ) действительные и положительные, следовательно, особая точка системы (4.17) — **неустойчивый узел**.

2. Уравнение изоклины горизонтальных касательных находим из второго уравнения системы (4.17):  $y = -\frac{x}{2}$ ; уравнение изоклины вертикальных касательных — из первого:  $x = 0$ . Как видно, изоклина вертикальных касательных совпадает с осью ординат, и траектории вблизи этой оси будут практически вертикальными.

Найдем углы пересечения фазовых траекторий с осью абсцисс, воспользовавшись уравнением изоклин (4.15).

Подставляя  $y = 0$ :  $\frac{x}{x+2 \cdot 0} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Таким образом, ось абсцисс является изоклиной, которую касательные к траекториям пересекают под углом  $45^\circ$ .

3. Найдем уравнения сепаратрис. Поскольку при подстановке  $\lambda_1 = 1$  в уравнение  $(a - \lambda_{1,2}) \cdot x + b \cdot y = 0$  все члены обратятся в ноль, воспользуемся вторым уравнением:  $c \cdot x + (d - \lambda_{1,2}) \cdot y = 0$ .

Уравнение сепаратрисы, связанной с  $\lambda_1 = 1$ , имеет вид

$$1 \cdot x + (2 - 1) \cdot y = 0, \text{ или } y = -x.$$

Уравнение сепаратрисы, связанной с  $\lambda_1 = 2$ , имеет вид

$$1 \cdot x + (2 - 2) \cdot y = 0, \text{ или } x = 0.$$

Вторая сепаратриса, таким образом, совпадает с осью ординат и изоклиной вертикальных касательных. В этом случае изоклина вертикальных касательных сама является одной из фазовых траекторий.

4. Фазовый портрет представляет собой расходящиеся от стационарной точки траектории (параболы для канонической системы), которые вблизи этой стационарной точки будут расположены бесконечно близко к сепаратрисе, связанной с меньшим  $\lambda_1 = 1$ .

5. Поскольку стационарная точка неустойчивая, то движение по траекториям будет в направлении от стационарного состояния (рис. 4.6,а).

6. Кинетический портрет (рис. 4.6,б) строим, используя рассуждения, аналогичные приведенным в примере 1.

**Пример 3.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases} \quad (4.18)$$

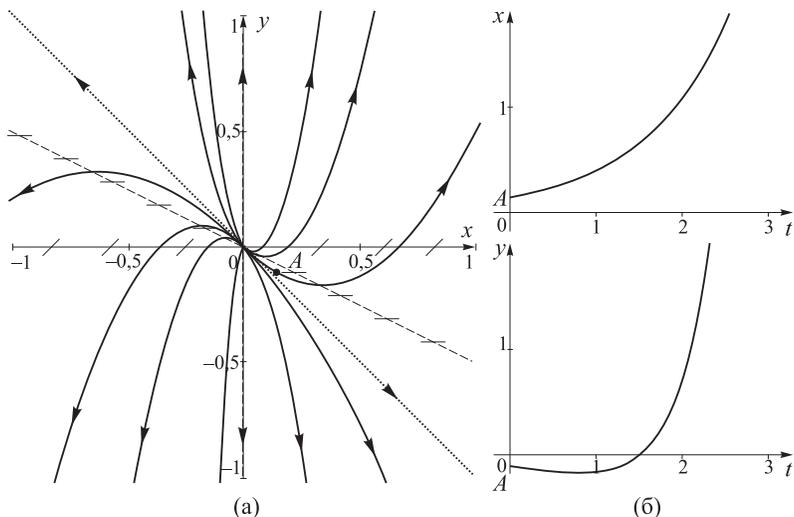


Рис. 4.6. Фазовый (а) и кинетический (б) портреты системы (4.17)

1. Коэффициенты линейризации:  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -3$ ,  $d = -1$ . Определим тип стационарного состояния, вычисляя корни характеристического уравнения:

$$\sigma = (a + d) = (-1 - 1) = -2,$$

$$\Delta = ad - bc = -1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) = 7.$$

По бифуркационной диаграмме (рис. 4.1) определяем, что особая точка устойчива и является либо узлом, либо фокусом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 7}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{24}}{2}.$$

Корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными:  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{6}$ ; следовательно, особая точка — **устойчивый фокус**.

2. Уравнение изоклины горизонтальных касательных находим из второго уравнения системы (4.18):  $y = -3x$ ; уравнение изоклины вертикальных касательных — из первого:  $y = \frac{x}{2}$ .

Найдем углы пересечения касательных к фазовым траекториям с осями координат, воспользовавшись уравнением изоклин (4.15).

Для оси абсцисс, подставляя  $y = 0$ :  $\frac{-x - 0 \cdot 2}{-3x - 1 \cdot 0} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ ,  
 $\alpha \approx 18^\circ$ .

Для оси ординат, подставляя  $x = 0$ :  $\frac{0 + 2y}{0 - y} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ,  
 $\alpha \approx -63^\circ$ .

Таким образом, ось абсцисс является изоклиной, которую касательные к траекториям пересекают под углом  $\sim 18^\circ$ , а ось ординат является изоклиной, которую касательные к траекториям пересекают под углом  $\sim 63^\circ$ .

3. Сепаратрисы у фокуса отсутствуют.

4. Фазовые траектории представляют собой закручивающиеся спирали.

5. Согласно проведенному анализу точка является устойчивой, и движение по траекториям будет направлено к стационарному состоянию. Однако для того, чтобы определить в какую сторону (по часовой или против часовой стрелки) будет закручиваться спираль фокуса, найдем направление скоростей изменения переменных, например, в точке (1, 1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ \frac{dy}{dt} = -3 \cdot 1 - 1 = -4. \end{cases}$$

Анализируя направление скоростей подобно тому, как это сделано в примере 1, видим, что  $x$  будет увеличиваться, а  $y$  — уменьшаться, то есть спираль фокуса будет закручиваться по часовой стрелке (рис. 4.7,а).

6. Кинетический портрет (рис. 4.7,б) строим, используя рассуждения, аналогичные приведенным в примере 1.

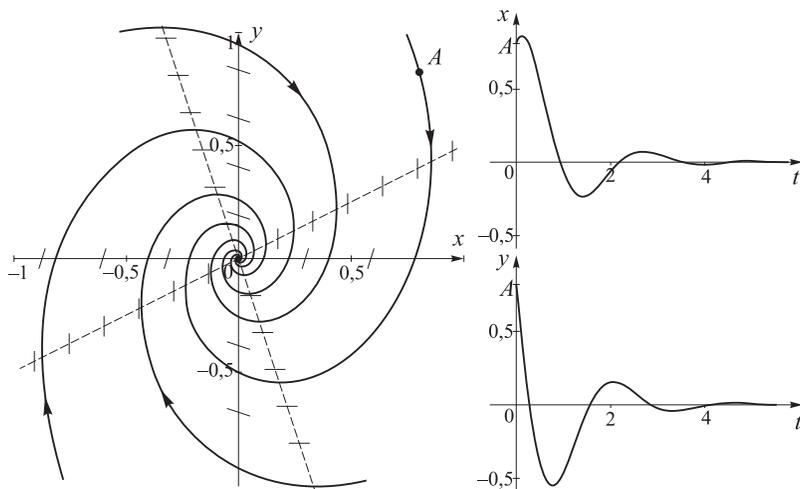


Рис. 4.7. Фазовый (а) и кинетический (б) портреты системы (4.18)

Рассмотрим пример построения фазовых и кинетических портретов для линейной системы в окрестности ненулевого стационарного состояния  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Пример 4.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y - 5, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y + 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

1. Определим координаты стационарного состояния:

$$\begin{cases} \bar{x} + 4\bar{y} - 5 = 0, \\ 4\bar{x} - 5\bar{y} + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = 1, \\ \bar{y} = 1. \end{cases}$$

2. Коэффициенты линеаризации:  $a=1$ ,  $b=4$ ,  $c=4$ ,  $d=-5$ . Определим тип стационарного состояния, вычисляя корни характеристического уравнения:

$$\sigma = (a + d) = (1 - 5) = -4,$$

$$\Delta = ad - bc = 1 \cdot (-5) - 4 \cdot 4 = -21.$$

По бифуркационной диаграмме (рис. 4.1) определяем, что особая точка — *седло*.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-21)}}{2} = \pm \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}.$$

Корни характеристического уравнения ( $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -7$ ) являются действительными, разных знаков, что подтверждает, что особая точка — *седло*.

3. Уравнение изоклины горизонтальных касательных находим из второго уравнения системы (4.19):  $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$ ; уравнение изоклины вертикальных касательных — из первого:  $y = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$ .

4. Найдем уравнения сепаратрис, используя уравнение  $(a - \lambda_{1,2}) \cdot (x - \bar{x}) + b \cdot (y - \bar{y}) = 0$ .

Уравнение сепаратрисы, связанной с  $\lambda_1 = 3$ :

$$(1 - 3) \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 1) = 0, \text{ или } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x.$$

Уравнение сепаратрисы, связанной с  $\lambda_2 = -7$ :

$$(1 - (-7)) \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 1) = 0, \text{ или } y = 3 - 2x.$$

Другой способ построения сепаратрис — построить их для точки  $(0, 0)$ , используя уравнение  $(a - \lambda_{1,2}) \cdot x + b \cdot y = 0$ , затем с помощью параллельного переноса переместить построение в точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

5. Фазовые траектории (гиперболы для канонической системы) приближаются к одной сепаратрисе и удаляются от другой.

6. Определим направление движения по найденным траекториям.

*Способ 1.* Выберем точку, например  $(2, 2)$ , и подставим ее координаты в систему уравнений. Получим выражения для скоростей изменения переменных  $x, y$  в этой точке:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 + 4 \cdot 2 - 5 = 5, \\ \frac{dy}{dt} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 1 = -1. \end{cases}$$

Получившиеся значения нам показывают, что скорость изменения переменной  $x$  положительная (то есть ее значение должно увеличиваться), а скорость изменения переменной  $y$  отрицательная (то есть ее значение должно уменьшаться). Отмечаем полученное направление стрелкой (рис. 4.8,а).

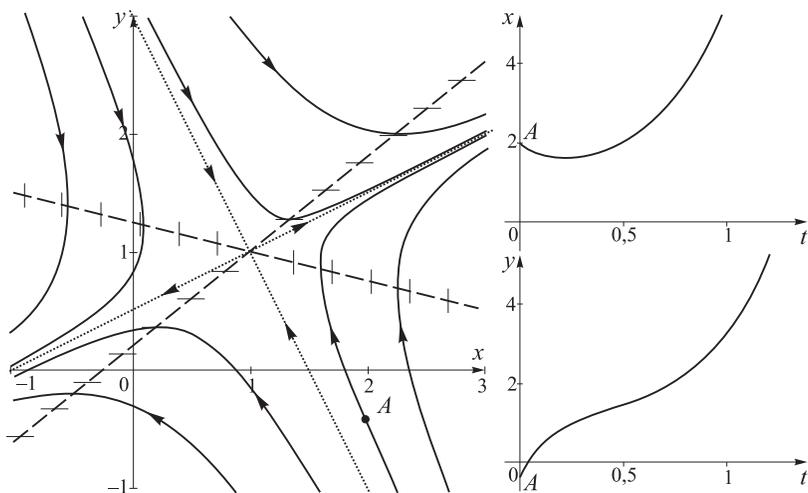


Рис. 4.8. Фазовый (а) и кинетический (б) портреты системы (4.19)

*Способ 2.* Траектории, идущие вдоль сепаратрисы, связанной с  $\lambda_1 = 3$ , удаляются от особой точки. Траектории, идущие вдоль сепаратрисы, связанной с  $\lambda_2 = -7$ , приближаются к особой точке. Направление остальных траекторий определяется в соответствии с найденным выше направлением траекторий, идущих вдоль сепаратрис.

7. Построим ход кривых  $x(t)$  и  $y(t)$ . При движении от начальной точки  $A$  по соответствующей фазовой траектории координата  $y$  изображающей точки неограниченно растет. Координата  $x$  при этом сначала уменьшается, приближаясь к особой точке, достигает минимального значения на изоклине вертикальных касательных, а затем начинает неограниченно увеличиваться. Такое движение в координатах  $(x, t)$  и  $(y, t)$  будет иметь вид как на рис. 4.8,б.

Рассмотренные примеры построения эскизов фазовых и кинетических портретов позволяют представить поведение переменных модели вблизи стационарного состояния. Если таких состояний в системе несколько, то на одной координатной плоскости в окрестности каждого из них следует построить свой эскиз и объединить получившиеся траектории в единый портрет. Степень подробности построения эскизов фазовых портретов определяется конкретной задачей, стоящей перед исследователем.

#### ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 4

4.1. Проведите линеаризацию системы уравнений в окрестности нулевого стационарного состояния  $(0, 0)$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

4.2. Для каждой системы линейных уравнений определите тип особой точки, постройте эскизы фазовых портретов с учетом нуль-изоклин и сепаратрис. Определите направление траекторий. Для вариантов (г), (е) постройте эскизы кинетических кривых.

$$\text{а) } \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = x - 4y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + y; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 3y; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y; \end{cases} \\ \text{д)} \begin{cases} x' = -2x + 5y, \\ y' = 5x - y; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases} \end{array}$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СЕМИНАРУ 5

**4.3.** Постройте фазопараметрическую диаграмму для модели Лотки в диапазоне  $0 < k < 8$ :

$$\begin{cases} x' = k - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

Для этого

- получите выражения для стационарных значений  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  в зависимости от параметра  $k$ ;
- рассчитайте  $\bar{y}$  для нескольких значений параметра  $k$  из заданного диапазона;
- постройте график  $\bar{y}(k)$  в заданном диапазоне параметра  $k$ ;
- рассчитав корни характеристического уравнения, отметьте на диаграмме области, где решение имеет колебательный характер и где — монотонный.

**4.4.** Для модели Вольтерры

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - y), \\ \frac{dy}{dt} = y(x - b) \end{cases}$$

найдите стационарные состояния и определите, к какому типу они относятся (для всех значений параметров).