

СЕМИНАР 8

Понятие автоколебаний. Предельные циклы. Рождение предельного цикла. Бифуркация Андронова-Хопфа. Мягкое и жесткое возбуждение колебаний. Брюсселятор. Модель Ходжкина–Хаксли.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Рассмотрим систему уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (8.1)$$

Если T ($T > 0$) — наименьшее число, для которого при всяком t выполняется $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$, то изменение переменных $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется периодическим изменением с периодом T .

Периодическому изменению соответствует замкнутая траектория на фазовой плоскости. Выделим сколь угодно малую область вокруг замкнутой траектории — ее ε -окрестность.

Предельным циклом называется изолированная замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой с внешней и внутренней стороны при $t \rightarrow +\infty$ (или при $t \rightarrow -\infty$) стремятся фазовые траектории, начинающиеся в ее ε -окрестности.

Предельный цикл называется **устойчивым**, если все фазовые траектории, начинающиеся в ε -окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$.

Если же, наоборот, в ε -окрестности предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$, то такой предельный цикл

называется **неустойчивым**. Такие циклы могут разделять области влияния (бассейны) разных притягивающих множеств.

Движения, отображаемые устойчивым предельным циклом, обладают следующими свойствами:

- а) устойчивость по отношению к малым возмущениям периодического движения;
- б) независимость периода и амплитуды движения от начальных условий.

РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА. БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА–ХОПФА

Существование предельных циклов возможно лишь в системе, правые части которой представлены нелинейными функциями. Напомним, что если в *линейной системе* корни характеристического уравнения комплексны, то есть имеют действительную и мнимую части, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ и $\operatorname{Im} \lambda_{1,2}$, то при изменении знака $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ (причем $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$) происходит смена устойчивости фокуса. Нулевым значениям действительной части характеристических чисел соответствует особая точка типа «центр» (рис. 8.1).

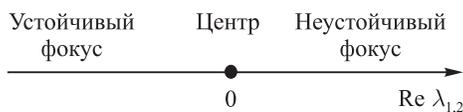


Рис. 8.1. Изменение устойчивости фокуса при изменении $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ в линейной системе ОДУ

В нелинейной системе, где возможно рождение предельного цикла, выполнение условий $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$ соответствует **бифуркации Андронова–Хопфа**, или бифуркации рождения предельного цикла. Существует два типа бифуркации Андронова–Хопфа, которые получили название *закритическая (суперкритическая)* бифуркация и *докритическая (субкритическая)* бифуркация.

ЗАКРИТИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ (МЯГКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ)

Рассмотрим модельную систему, представленную в полярных координатах r, φ (r — радиус, φ — угол), c — параметр.

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(c - r^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases} \quad (8.2)$$

Напомним, что монотонное решение $r(t)$, полученное в полярных координатах, будет соответствовать периодическому решению в декартовых координатах.

Решение $r = 0$ в полярных координатах соответствует точке в декартовых координатах (окружность с нулевым радиусом).

Решение $r = a$ ($a \neq 0$) в полярных координатах соответствует окружности (предельному циклу) в декартовых координатах с радиусом $r = a$.

Устойчивость (неустойчивость) особой точки в полярных координатах соответствует устойчивости (неустойчивости) цикла в декартовых координатах.

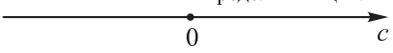
Итак, исследуем систему (8.2).

Стационарные состояния: $\bar{r}_1 = 0, \bar{r}_{2,3} = \pm\sqrt{c}$.

Поскольку r — это радиус, то реальный смысл имеют только неотрицательные действительные значения r : $\bar{r}_1 = 0, \bar{r}_2 = \sqrt{c}$.

\bar{r}_1 существует при любых значениях параметра c ; \bar{r}_2 существует при $c \geq 0$.

Проведем линейный анализ устойчивости стационарных значений r . Производная правой части первого уравнения (8.2) по переменной r равна $\frac{\partial P}{\partial r} = c - 3r^2$. Выражения для производной в стационарном состоянии и соответствующие параметрические диаграммы имеют следующий вид:

Стационарное решение — точка	Стационарное решение — предельный цикл
$\bar{r}_1 = 0$	$\bar{r}_2 = \sqrt{c}$
$\frac{\partial P}{\partial r} = c$	$\frac{\partial P}{\partial r} = -2c$
Устойчивый фокус Неустойчивый фокус	Устойчивый предельный цикл
	

Возникновение предельного цикла и увеличение амплитуды с ростом параметра c в системе (8.2) можно проследить по фазопараметрической диаграмме (рис. 8.2).

Рассмотрим, что происходит в системе, если увеличивать параметр c , начиная с отрицательных значений (рис. 8.2).

Первоначально имеется единственное устойчивое стационарное состояние $\bar{r}_1 = 0$, устойчивый фокус.

При $c > 0$ точка $\bar{r}_1 = 0$ становится неустойчивым фокусом, и в системе возникает предельный цикл с радиусом $\bar{r}_2 = \sqrt{c}$, который растёт пропорционально \sqrt{c} .

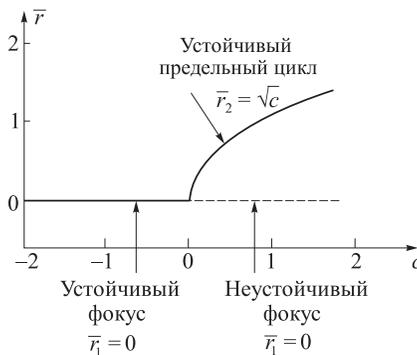


Рис. 8.2. Фазопараметрическая диаграмма для модели (8.2). При $c = 0$ происходит закрытая (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа, мягкое возбуждение автоколебаний

ЗАДАНИЕ 8.1**8.1.1. Изучение мягкого возбуждения автоколебаний.**

Запишем систему (8.2) в декартовых координатах. Сделаем замену переменных: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$. Получим

$$\begin{cases} x' = x(c - (x^2 + y^2)) - 2\pi y, \\ y' = y(c - (x^2 + y^2)) + 2\pi x. \end{cases} \quad (8.3)$$

В программе для решения ОДУ постройте фазовые портреты системы (8.3) при разных значениях параметра c и разных начальных условиях.

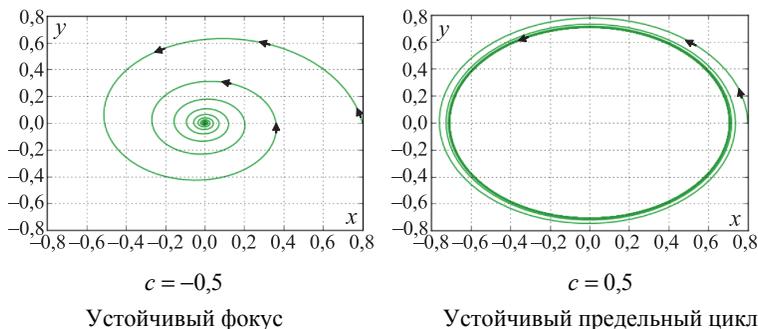


Рис. 8.3. Пример фазовых портретов системы (8.3) при изменении параметра c

ДОКРИТИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ (ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ)

Рассмотрим модельную систему, описывающую рождение предельного цикла в случае жесткого возбуждения, в полярных координатах r, φ (r — радиус, φ — угол), c — параметр:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(c + 2r^2 - r^4), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases} \quad (8.4)$$

Приравняв правую часть первого уравнения к нулю, получим следующие стационарные значения радиуса r :

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= 0, \\ \bar{r}_{2,3} &= \sqrt{1 \pm \sqrt{1+c}}, \\ \bar{r}_{4,5} &= -\sqrt{1 \pm \sqrt{1+c}}.\end{aligned}$$

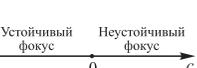
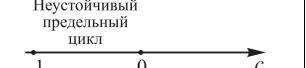
Физический смысл имеют лишь неотрицательные действительные значения r : $\bar{r}_1 = 0$, $\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1+c}}$, $\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1+c}}$.

Стационарное значение \bar{r}_1 существует при любых значениях параметра c , \bar{r}_2 существует при $-1 \leq c \leq 0$, и \bar{r}_3 существует при $c \geq -1$.

Проведем анализ устойчивости стационарных значений r , линеаризуя систему (8.4). Производная правой части первого уравнения системы (8.4) по переменной r равна

$$\frac{\partial P}{\partial r} = c + 6r^2 - 5r^4.$$

Выражения для производной в каждом стационарном состоянии и соответствующие параметрические диаграммы имеют следующий вид:

Стационарное решение — точка	Стационарное решение — предельный цикл	Стационарное решение — предельный цикл
$\bar{r}_1 = 0$	$\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1+c}}$	$\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1+c}}$
$\frac{\partial P}{\partial r} = c$	$\frac{\partial P}{\partial r} = 4 \cdot \sqrt{1+c} \cdot (1 - \sqrt{1+c})$	$\frac{\partial P}{\partial r} = -4 \cdot \sqrt{1+c} \cdot (1 + \sqrt{1+c})$
		

Возникновение предельного цикла и увеличение амплитуды с ростом параметра c в системе (8.4) можно проследить по фазопараметрической диаграмме (рис. 8.4).

Рассмотрим, что происходит в системе, если увеличивать параметр c , начиная с отрицательных значений (рис. 8.4).

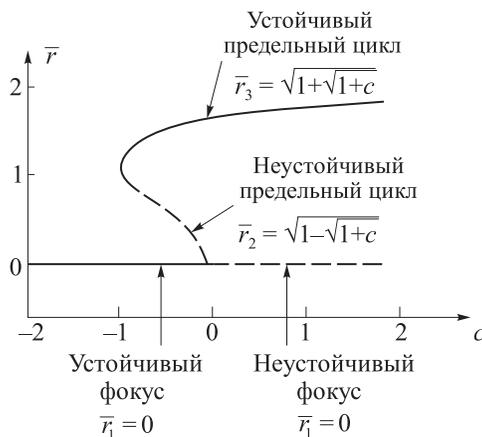


Рис. 8.4. Фазопараметрическая диаграмма для модели (8.4). При $c = -1$ происходит докритическая (субкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа, жесткое возбуждение автоколебаний

При $c < -1$ в системе существует единственное устойчивое стационарное решение $\bar{r}_1 = 0$, устойчивый фокус.

При $-1 < c < 0$ в системе существуют два устойчивых решения — устойчивый фокус $\bar{r}_1 = 0$ и устойчивый предельный цикл $\bar{r}_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + c}}$. Их бассейны притяжения разделяет неустойчивый предельный цикл $\bar{r}_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + c}}$. (Неустойчивые решения изображены пунктиром). В зависимости от начальных условий фазовые траектории либо скручиваются в устойчивый фокус, либо наматываются на устойчивый предельный цикл (сравните с силовым переключением триггера, см. семинар 6).

При $c = 0$ неустойчивый предельный цикл сливается с устойчивым фокусом, точка $\bar{r}_1 = 0$ теряет устойчивость и становится неустойчивым фокусом.

ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ С МЯГКИМ И ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Локальная модель *брюсселятор* (мягкое возбуждение автоколебаний)

Брюсселятор — базовая модель, являющаяся классическим примером автоколебательного поведения переменных (концентраций) в системе химических реакций. Локальная модель *брюсселятор* представляет собой следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - x(B+1) + x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = x(B - xy). \end{cases} \quad (8.6)$$

Здесь x, y — концентрации веществ; A, B — параметры модели.

Исследуем систему уравнений (8.6).

1. Найдем стационарные значения, приравняв правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} \bar{x} = A, \\ \bar{y} = \frac{B}{A}. \end{cases}$$

2. Линеаризуем систему вблизи стационарного состояния. Найдем коэффициенты линеаризации:

$$\begin{aligned} P'_x(\bar{x}, \bar{y}) &= -(B+1) + 2\bar{x} \cdot \bar{y} = B-1, & P'_y(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{x}^2 = A^2, \\ Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) &= B - 2\bar{x} \cdot \bar{y} = -B, & Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) &= -\bar{x}^2 = -A^2. \end{aligned}$$

3. Исследуем, как зависит тип стационарного состояния от значений параметров модели:

$$\begin{aligned} \sigma &= P'_x + Q'_y = B - 1 - A^2, \\ \Delta &= P'_x \cdot Q'_y - P'_y \cdot Q'_x = -A^2(B-1) + A^2B = A^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta > 0$, то по бифуркационной диаграмме $\sigma(\Delta)$ (рис. 4.1) определяем, что стационарное состояние не является седлом.

Характеристические числа равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{B-1-A^2 \pm \sqrt{(B-1-A^2)^2 - 4A^2}}{2}.$$

Для ответа на вопрос об устойчивости исследуем знак σ .

Если $\sigma > 0$, то есть $B > 1 + A^2$, то стационарная точка неустойчива.

Если $\sigma < 0$, то есть $B < 1 + A^2$, то стационарная точка устойчива.

При $\sigma = 0$, то есть $B = 1 + A^2$, происходит смена устойчивости стационарного состояния, в этот момент происходит бифуркация Андронова–Хопфа — рождение предельного цикла.

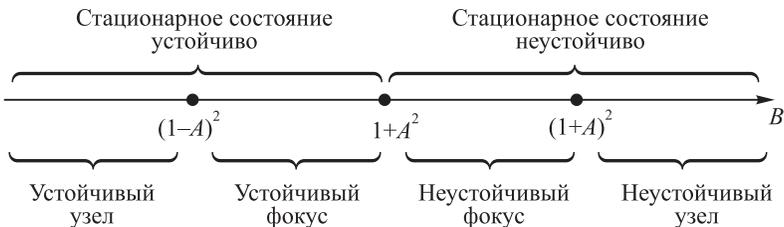
Чтобы определить тип стационарной точки (фокус или узел), исследуем знак подкоренного выражения в формуле для $\lambda_{1,2}$:

$$\sigma^2 - 4\Delta = (B-1-A^2)^2 - 4A^2 = (B-(1-A)^2)(B-(1+A)^2).$$

Если $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, то есть $(1-A)^2 < B < (1+A)^2$, тогда стационарное состояние — фокус.

Если $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0$, то есть $B \leq (1-A)^2$ и $B \geq (1+A)^2$, тогда стационарное состояние — узел.

Получившиеся результаты можно представить в виде параметрической диаграммы.



Фазовые портреты для всех типов стационарных состояний представлены на рис. 8.6.

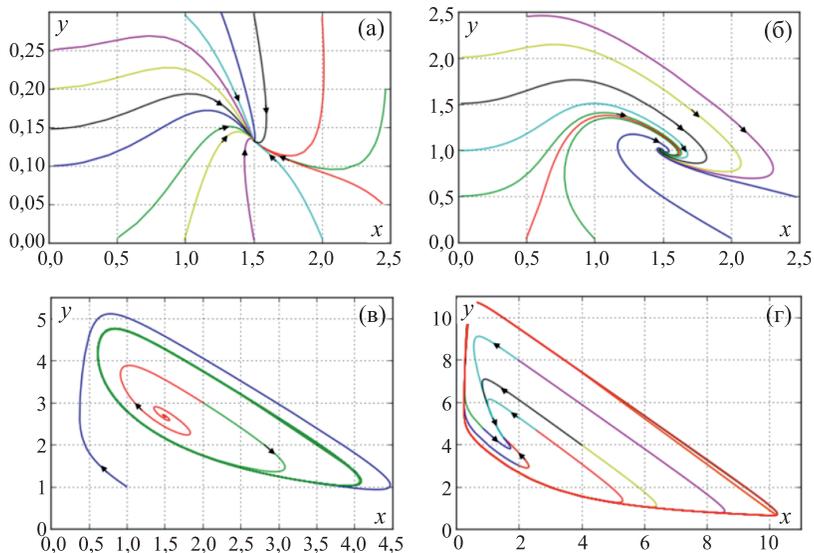


Рис. 8.6. Фазовые портреты модели *брюсселятор* при изменении параметра B , $A = 1,5$: а) $B = 0,2$, устойчивый узел; б) $B = 3$, устойчивый фокус; в) $B = 4$, неустойчивый фокус, устойчивый предельный цикл; г) $B = 6,5$, неустойчивый узел, устойчивый предельный цикл. Устойчивый предельный цикл возникает при $B > 4$ (мягкое возбуждение автоколебаний)

ЗАДАНИЕ 8.3

Для модели *брюсселятор* постройте кинетические кривые $x(t)$ и $y(t)$ при значениях параметров вблизи точки бифуркации: $A = 1,5$, $B = 4,1$.

Исследуйте, как меняются амплитуды колебаний переменных $x(t)$ и $y(t)$ при постепенном увеличении параметра B . Сравните с изменением радиуса предельного цикла в модели (8.2) на диаграмме $\bar{r}(c)$ (рис. 8.2).

**Модель Ходжкина–Хаксли возникновения колебаний
электрического потенциала на мембране нервного волокна
(жесткое возбуждение автоколебаний)**

Первая модель распространения электрического импульса вдоль аксона гигантского кальмара была предложена А. Ходжкиным и Э. Хаксли (1952) и до сих пор является базовой моделью для описания такого типа явлений. Механизм возникновения электрического импульса на мембране аксона связан с тем, что проницаемость мембраны различна для разных ионов. Главную роль в процессе генерации электрического потенциала на мембране играют ионы натрия (Na^+) и калия (K^+).

Общее уравнение, связывающее изменение мембранного потенциала, ионные токи через мембрану и внешний стимулирующий ток, имеет вид

$$C \frac{dV}{dt} + I_i = I_{ex}. \quad (8.7)$$

Здесь V — потенциал на мембране, C — емкость мембраны, I_i — вклад тока за счет переноса ионов через мембрану, I_{ex} — стимулирующий внешний ток, положительно направленный от внутренней стороны к внешней стороне мембраны аксона.

На основании экспериментальных данных А. Ходжкин и Э. Хаксли записали следующее выражение для ионного тока I_i :

$$\begin{aligned} I_i &= I_{\text{Na}} + I_{\text{K}} + I_l = \\ &= g_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) + g_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) + g_l (V - V_l), \end{aligned} \quad (8.8)$$

где I_{Na} — натриевый ток, I_{K} — калиевый ток и I_l — ток «утечки», обусловленный токами других ионов через мембрану; V_{Na} , V_{K} , V_l — равновесные потенциалы, а G_{Na} , G_{K} , G_l — проводимости мембраны для соответствующих типов ионов, которые были записаны как

$$G_{\text{Na}} = g_{\text{Na}} m^3 h, \quad G_{\text{K}} = g_{\text{K}} n^4, \quad G_l = g_l.$$

Здесь g_{Na} , g_{K} , g_{I} — максимальные проводимости мембраны для соответствующих типов ионов, величины m , n , h — переменные (в исходной модели — так называемые воротные частицы, влияющие на проводимость), которые изменяются от 0 до 1.

Окончательная система уравнений, описывающая генерацию трансмембранного потенциала (потенциала действия), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C} [g_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) + g_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) + g_{\text{I}} (V - V_{\text{I}}) - I_{\text{ex}}], \quad (8.9)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m, \quad (8.10)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h, \quad (8.11)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n, \quad (8.12)$$

где

$$\alpha_m = 0,1 \frac{V+40}{1-e^{-\frac{V+40}{10}}}, \quad \alpha_h = 0,07 e^{-\frac{V+65}{20}}, \quad \alpha_n = 0,01 \frac{V+55}{1-e^{-\frac{V+55}{10}}},$$

$$\beta_m = 4e^{-\frac{V+65}{18}}, \quad \beta_h = \frac{1}{1+e^{-\frac{V+35}{10}}}, \quad \beta_n = 0,125 e^{-\frac{V+65}{80}}.$$

Уравнения для m , h , n и выражения для констант скорости $\alpha(V)$ и $\beta(V)$ были выведены эмпирически.

Совокупность уравнений (8.9)–(8.12) составляет систему из четырех уравнений, известную как система Ходжкина–Хаксли. Она хорошо воспроизводит наблюдаемые в эксперименте явления протекания натриевого и калиевого тока через мембрану аксона кальмара и генерацию потенциала на мембране (потенциала действия).

Как видно из уравнений (8.9)–(8.12), модель описывается сложными нелинейными функциями, поэтому аналитическое исследование такой модели крайне затруднено. Однако сценарии возник-

новения автоколебаний, сценарии бифуркаций являются универсальными для многих моделей. Возникновение колебаний в исследуемой модели (8.9)–(8.12) будет проходить через те же стадии, которые были рассмотрены для модели с жестким возбуждением (8.4).

При изменении параметра g_{Na} мы наблюдаем следующие режимы в модели. Сначала мы обнаруживаем единственную особую точку — устойчивый фокус. При увеличении значения g_{Na} в системе сосуществуют два устойчивых режима: устойчивый фокус и устойчивый предельный цикл, разделенные неустойчивым предельным циклом. В зависимости от начальных условий с течением времени изображающая точка будет притягиваться либо к устойчивому фокусу, либо к предельному циклу (рис. 8.7). Последующее увеличение g_{Na} приводит к тому, что устойчивый фокус превращается в неустойчивый, и остается один устойчивый режим — предельный цикл.

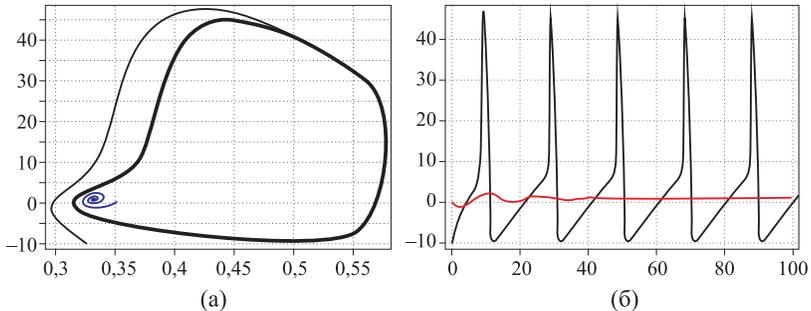


Рис. 8.7. Фазовый (а) и кинетический (б) портрет системы (8.9)–(8.12). Существование двух устойчивых режимов: устойчивого фокуса и устойчивого предельного цикла. В зависимости от начального значения V изображающая точка будет стремиться либо к устойчивому фокусу (при $V = 0$), либо к предельному циклу (при $V = -10$). Начальные условия для остальных переменных: $m = 0,056$, $h = 0,577$, $n = 0,326$. Значения параметров модели: $C = 1$ мкФ см^{-2} , $g_{Na} = 220$ мОм $^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$, $g_K = 36$ мОм $^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$, $g_I = 0,3$ мОм $^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$, $V_{Na} = -115$ мВ, $V_K = 12$ мВ, $V_I = -10,6$ мВ, $I_{ex} = 0$ мкА $\cdot \text{см}^{-2}$

Исследование поведения модели при изменении параметров, в частности параметра проводимости натриевого канала g_{Na} , позволяет предложить способы воздействия на систему: увеличивая или уменьшая, например, натриевую проводимость с помощью химических агентов, можно инициировать колебания мембранного потенциала или прекратить их.

ЗАДАНИЕ 8.4

Найдите бифуркационные значения g_{Na} , при которых (1) возникает устойчивый предельный цикл и одновременно существует устойчивый фокус, (2) устойчивый фокус исчезает, остается только устойчивый предельный цикл.

Какие неустойчивые режимы существуют в каждом из 2-х вариантов? Для ответа воспользуйтесь аналогией с системой (8.4).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается предельный цикл от центра?
2. Чем отличаются сценарии мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний?
3. Сколько устойчивых режимов одновременно может реализоваться в системе с жестким возбуждением автоколебаний?
4. Каким образом можно прекратить колебания в системе с жестким возбуждением автоколебаний (сравнить с силовым и параметрическим переключением триггера)?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 8

8.1. Модельная система, демонстрирующая докритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, может быть описана в полярных координатах системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(a - 1 + 2r^2 - r^4), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi. \end{cases}$$

Здесь r — радиус, φ — угол, a — параметр, от которого зависит длина радиуса.

Найдите все решения модели. Проведите линейный анализ и определите тип каждого из найденных решений в зависимости от a .

Постройте параметрическую диаграмму с указанием всех типов решения в каждой найденной области параметра a .

Постройте фазовый портрет системы при $a = 0,5$ в *декартовых координатах*, имея в виду, что решение «предельный цикл» в декартовых координатах будет окружностью с центром в начале координат и радиусом, определяемым из выражений для стационарных состояний в системе в полярных координатах. Устойчивые решения изобразите сплошной линией, а неустойчивые — пунктиром.

8.2. Модель гликолиза в безразмерном виде может иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \frac{dy}{dt} = 2y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right). \end{cases}$$

Здесь x и y — безразмерные концентрации метаболитов гликолиза, фруктозы-6-фосфат (Ф6Ф) и фруктозы дифосфат (ФДФ) соответственно, r — параметр, пропорциональный скорости притока Ф6Ф в сферу реакции.

Найдите стационарное состояние модели. Проводя линейный анализ, исследуйте, как зависит тип стационарного состояния от скорости притока Ф6Ф в сферу реакции r . Постройте параметрическую диаграмму, указывая типы стационарного состояния для различных областей r . При каком значении r происходит закритическая бифуркация Андронова–Хопфа? Опишите, какие динамические режимы возникают при увеличении r от 0,5 до 1,5.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СЕМИНАРУ 9

8.3. Пусть характеристические уравнения для модели I и для модели II имеют следующий вид:

I. $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, $\sigma < 0$, $\Delta > 0$.

II. $p^2 - \sigma^1 p + \Delta^1 = 0$.

Параметры модели I связаны с параметрами модели II следующим образом:

$$\sigma^1 = \sigma - A, \quad \Delta^1 = \Delta - B \quad (A > 0, B > 0).$$

Используя бифуркационную диаграмму для характеристического уравнения (семинар 4), определите:

- 1) какие типы стационарных состояний возможны в модели I;
- 2) при каких значениях параметров A и B в модели II возможна неустойчивость.