# СЕМИНАР 9

*Линейный анализ устойчивости гомогенного стационарного состояния системы двух уравнений «реакция-диффузия». Неустойчивость Тьюринга. Активатор и ингибитор. Условия возникновения диссипативных структур.*

## ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»

Рассмотрим модель химической реакции, в которой два вещества претерпевают химические превращения и могут диффундировать в реакционном объеме. Такая модель представляет собой ***распределенную*** систему, и в случае одномерного реактора (учитывается только одна пространственная переменная) может быть описана системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \end{cases} \tag{9.1}$$

Здесь $r$ — пространственная переменная. Пусть краевыми условиями являются условия непроницаемости торцов одномерного реактора:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{r=l} = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=l} = 0. \tag{9.2}$$

Как и в случае ***точечных*** систем (где динамика переменных описывается ОДУ), первым необходимым этапом изучения распределенной системы является исследование устойчивости ее однородного стационарного состояния.

***Пространственно однородным (гомогенным) стационарным состоянием*** называется такое состояние системы, при котором значения переменных не меняются со временем и одинаковы в каждой точке пространства.

Исследование на устойчивость будем проводить аналогично тому, как проводилось исследование на устойчивость в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений (точечной системы).

| ***Точечная система*** | ***Распределенная система*** |
|---|---|
| $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (9.3)$$ | $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) + D_x \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y) + D_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{cases} \qquad (9.3')$$ |
| Рассмотрим стационарное состояние системы, такое, что $$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \qquad (9.4)$$ | Рассмотрим пространственно однородное решение системы, такое, что $$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \qquad (9.4')$$ |
| где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются корнями алгебраической системы уравнений: $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$. | |
| ***Стационарное состояние устойчиво***, если малые отклонения не выводят систему слишком далеко из окрестности этого состояния | ***Пространственно однородное стационарное состояние устойчиво***, если малые отклонения (в том числе и распределенные в пространстве) не выводят систему слишком далеко из окрестности этого состояния |
| Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — малые отклонения от стационарных решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$. | Пусть $\xi(t,\ r)$ и $\eta(t,\ r)$ — малые отклонения от пространственно однородных решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$. |

<table>
<tr><th>Точечная система</th><th>Распределенная система</th></tr>
<tr><td>Тогда для $\xi$ и $\eta$ можно записать линеаризованную систему<br>$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = a\xi + b\eta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = c\xi + d\eta \end{cases} \qquad (9.5)$$</td><td>Тогда для $\xi$ и $\eta$ можно записать распределенную линеаризованную систему<br>$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = a\xi + b\eta + D_\xi \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = c\xi + d\eta + D_\eta \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \end{cases} \qquad (9.5')$$<br>$$D_\xi = D_x \; D_\eta = D_y$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$a = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \qquad (9.6)$$</td></tr>
<tr><td>Решение будем искать в виде<br>$$\xi(t) = Ae^{\lambda t}, \qquad (9.7)$$<br>$$\eta(t) = Be^{\lambda t}.$$<br>Множитель $e^{\lambda t}$ характеризует поведение отклонения от стационарного состояния во времени</td><td>Решение будем искать в виде<br>$$\xi(t, r) = Ae^{pt}e^{ikr}, \qquad (9.7')$$<br>$$\eta(t, r) = Be^{pt}e^{ikr}.$$<br>Множитель $e^{pt}$ характеризует поведение отклонения от стационарного состояния во времени.<br>Множитель $e^{ikr}$ характеризует отклонение величин переменных от однородного стационарного состояния в точке с координатой $r$ для собственных функций, соответствующих волновому числу $k$. Для трубки длиной $l$ волновое число принимает дискретные значения $k = k_n = \dfrac{\pi n}{l}$.<br>Для бесконечного одномерного реактора волновые числа $k$ меняются от 0 до $\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Точечная система</th><th>Распределенная система</th></tr>
<tr><td>Подстановка выражений (9.7) в (9.5) после сокращения на $e^{\lambda t}$ дает:

$$\begin{cases}\lambda A = aA + bB\ , \\ \lambda B = cA + dB,\end{cases} \tag{9.8}$$

или

$$\begin{cases}(\lambda - a)A - bB = 0, \\ cA - (\lambda - d)B = 0\end{cases} \tag{9.9}$$
</td><td>Подстановка выражений (9.7′) в (9.5′) после сокращения на $e^{pt}e^{ikr}$ дает:

$$\begin{cases}pA = aA + bB - k^2 D_\xi A\ , \\ pB = cA + dB - k^2 D_\eta B,\end{cases} \tag{9.9′}$$

или

$$\begin{cases}(p - a + k^2 D_\xi)A - bB = 0, \\ cA - (p - d + k^2 D_\eta)B = 0\end{cases} \tag{9.9′}$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Величины $A$, $B$ тождественно не равны нулю только в том случае, если определитель систем (9.9) и (9.9′) равен нулю:</td></tr>
<tr><td>$(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0.$

Получим характеристическое уравнение

$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$ где

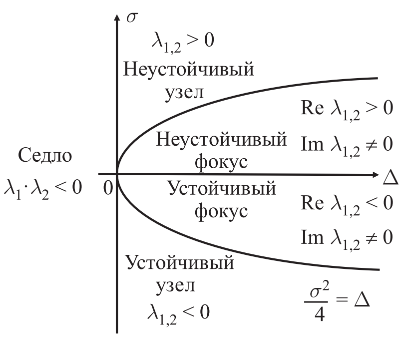
$\sigma = a + d,$

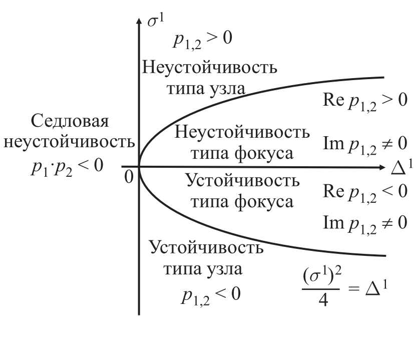
$\Delta = ad - bc$
</td><td>$(p - a + k^2 D_\xi)(p - d + k^2 D_\eta) - bc = 0.$

Получим дисперсионное уравнение

$p^2 - \sigma^1 p + \Delta^1 = 0,$ где

$\sigma^1 = a + d - k^2(D_\xi + D_\eta),$

$\Delta^1 = k^4 D_\xi D_\eta - k^2(aD_\eta + dD_\xi) +$
$+ ad - bc$
</td></tr>
<tr><td>Бифуркационная диаграмма 1</td><td>Бифуркационная диаграмма 2</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЬЮРИНГА

Определим условия возникновения диффузионной неустойчивости, обусловленной только процессами диффузии (неустойчивости Тьюринга). Это означает, что однородное стационарное состояние $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ будет устойчивым по отношению к малым однородным возмущениям (соответствующая точечная система устойчива) и неустойчивым по отношению к малым пространственно неоднородным возмущениям.

Анализ бифуркационных диаграмм 1 и 2 показывает, что сформулированное выше условие реализуется в случае выполнения следующих неравенств:

$\sigma < 0$, $\Delta > 0$ (условие устойчивости в точечной системе), $\sigma^1 > 0$ (1-е условие неустойчивости в распределенной системе) либо $\Delta^1 < 0$ (2-е условие неустойчивости в распределенной системе).

При положительных коэффициентах диффузии ($D_x > 0$, $D_y > 0$) и $\sigma < 0$ выражение $\sigma^1 = a + d - k^2(D_x + D_y)$ всегда отрицательно (так как $\sigma = a + d < 0$). Следовательно, для возникновения неустойчивости в распределенной системе необходимо выполнение неравенства $\Delta^1 < 0$ (седловая неустойчивость).

Таким образом, для возникновения диффузионной неустойчивости (неустойчивости Тьюринга) необходимо одновременное выполнение следующих условий:

1) $a + d < 0$,
2) $ad - bc > 0$,
3) $k^4 D_x D_y - k^2(aD_y + dD_x) + ad - bc < 0$.

## ПОНЯТИЯ АКТИВАТОРА И ИНГИБИТОРА

Рассмотрим подробнее 3-е условие:

$$\{k^4 D_x D_y\} + \{-k^2(aD_y + dD_x)\} + \{ad - bc\} < 0.$$

Первое слагаемое положительно, $\{k^4 D_x D_y\} > 0$, поскольку все коэффициенты положительны. Третье слагаемое также положительно, $\{ad - bc\} > 0$, это следует из условия 2. Тогда сумма трех рассматриваемых слагаемых может быть отрицательной только за счет второго слагаемого, которое должно быть отрицательным: $-k^2(aD_y + dD_x) < 0$. Отсюда следует, что выражение в скобках должно быть положительно: $(aD_y + dD_x) > 0$.

Найдем условия, когда неравенства $(aD_y + dD_x) > 0$ и $a + d < 0$ (условие 1) выполняются одновременно. Это возможно, только если один из коэффициентов $a$ и $d$ будет положительным, а второй — отрицательным.

Пусть для определенности $a > 0$, а $d < 0$. Назовем вещество $x$ ***активатором*** (поскольку при $a > 0$ увеличение $x$ будет приводить к увеличению воспроизводства самого себя, $a \cdot x$ является автокаталитический членом), а вещество $y$ — ***ингибитором***.

Заметим, что коэффициент $a$ должен быть по модулю меньше, чем коэффициент $d$, $|a| < |d|$, иначе условие 1 ($a + d < 0$) не будет выполняться.

Перепишем неравенство $(aD_y + dD_x) > 0$, в виде $D_x\left(a\dfrac{D_y}{D_x} + d\right) > 0$. Если $a > 0$, $d < 0$ и $a + d < 0$, то $\left(a\dfrac{D_y}{D_x} + d\right) > 0$, только при $\dfrac{D_y}{D_x} > 1$, или $D_y > D_x$.

Таким образом, необходимым (но не достаточным) условием возникновения диффузионной неустойчивости является выполнение следующих условий:

1) коэффициенты $a$ и $d$ должны быть с разными знаками;

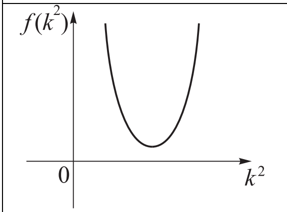
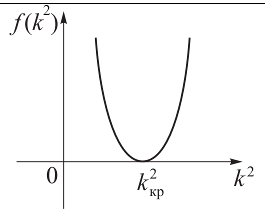
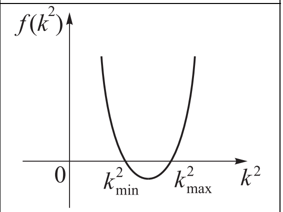
2) коэффициент диффузии активатора меньше коэффициента диффузии ингибитора.

*При равных коэффициентах диффузии диффузионная неустойчивость возникнуть не может.*

## СООТНОШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ, ПРИ КОТОРОМ ВОЗНИКАЮТ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Выражение $f(k^2) = k^4 D_x D_y - k^2(aD_y + dD_x) + \Delta$ задает параболу, ветви которой направлены вверх. Как было показано в предыдущих разделах, для возникновения диффузионной неустойчивости необходимо, чтобы существовали такие значения $k$, при которых $f(k^2) < 0$ (см. 3-е условие).

Рассмотрим положение параболы $f(k^2)$ в зависимости от знака дискриминанта $Dis = \left(aD_y + dD_x\right)^2 - 4D_x D_y \Delta$, $\Delta = ad - bc$.

| $Dis < 0$ | $Dis = 0$ | $Dis > 0$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Вся парабола лежит в положительной области. Распределенная система устойчива. Диффузионная неустойчивость не возникает | Существует критическое (бифуркационное) значение $k^2_{кр}$, при котором возникает переход от устойчивого состояния к неустойчивому | Часть параболы лежит в отрицательной области. Диффузионная неустойчивость возникает в интервале $k^2_{min} < k^2 < k^2_{max}$ |

Найдем критическое (бифуркационное) соотношение коэффициентов диффузии, при котором возникает переход из устойчивого состояния в неустойчивое, из условия $Dis = 0$: $\left(aD_y + dD_x\right)^2 - 4D_xD_y\Delta = 0$.

Пусть $D_{\text{кр}} = \dfrac{D_y}{D_x}$.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(aD_{\text{кр}} + d\right)^2 - 4D_{\text{кр}}\Delta = 0,$$

или

$$a^2D_{\text{кр}}^2 + 2(ad - 2\Delta)D_{\text{кр}} + d^2 = 0.$$

Корни уравнения определяются как

$$D_{\text{кр},1} = \frac{2\Delta - ad + 2\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta - ad}}{a^2},$$

$$D_{\text{кр},2} = \frac{2\Delta - ad - 2\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta - ad}}{a^2}.$$

Можно показать, что $k_{\text{кр}}^2$ может принимать положительные значения только при $D_{\text{кр},1}$.

Таким образом, *для возникновения диффузионной неустойчивости необходимо выполнение следующих условий*:

1) $a+d<0$, $a>0$, $d<0$ (либо $a<0$, $d>0$),

2) $ad-bc>0$,

3) $\dfrac{D_y}{D_x} > D_{\text{кр}}$, где $D_{\text{кр}} = \dfrac{2\Delta - ad + 2\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta - ad}}{a^2}$.

При этом волновое число $k_{\text{кр}}^2 = \dfrac{aD_{\text{кр}} + d}{2D_xD_{\text{кр}}}$.

Число волн на отрезке (число диссипативных структур) в момент возникновения неустойчивости будет равно целой части от выражения $\dfrac{k_{\text{кр}}}{2\pi}$.

## Задание 9.1

Для модели «брюсселятор» (система «реакция-диффузия»):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A + u^2 v - (B+1)u + D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = Bu - u^2 v + D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{cases}$$

где $u$ — *активатор*, $v$ — *ингибитор*, $t$ — время, $x$ — пространственная координата, рассчитайте при заданных преподавателем параметрах $A$ и $B$:

а) критическое значение отношения коэффициентов диффузии:

$$D_{\text{кр}} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{A^2}{(\sqrt{B}-1)^2};$$

б) значение коэффициента диффузии *ингибитора* $D_2 = D_1 D_{\text{кр}}$, если значение коэффициента диффузии *активатора* $D_1 = 10^{-3}$;

в) волновое число: $k_{\text{кр}}^2 = \dfrac{\sqrt{B}-1}{D_1}$;

г) число диссипативных структур (число волн) на отрезке:

$$n = \frac{k_{\text{кр}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{B}-1}{D_1}}.$$

## Задание 9.2

В программе для решения дифференциальных уравнений в частных производных получите диссипативные структуры при значениях параметров, используемых в задании 9.1.

Убедитесь, что при соотношении коэффициентов диффузии меньше расчетного $D_{\text{кр}}$ структуры не возникают.

Сопоставьте расчетное число диссипативных структур $n$ с числом волн на отрезке, полученным в численном счете.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как записать систему уравнений «реакция-диффузия» в общем виде?

2. Как выводится дисперсионное уравнение?

3. Может ли в распределенной системе возникнуть неустойчивость по типу узла, если соответствующая точечная система устойчива при любых параметрах?

4. Какие типы неустойчивости могут реализоваться в распределенной системе, если точечная система устойчива при любых параметрах?

5. Что такое неустойчивость Тьюринга?

6. Какая переменная называется активатором, а какая — ингибитором?

7. Как должны соотноситься коэффициенты диффузии активатора и ингибитора, чтобы в распределенной модели возникла неустойчивость Тьюринга при условии устойчивости соответствующей точечной системы?

## ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 9

**9.1.** Проведите линейный анализ следующих моделей «реакция-диффузия»:

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy + D_x \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay\left(x - \dfrac{2}{1+y}\right) + D_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2}; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + x^2 y - (a+1)x + D_x \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - x^2 y + D_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2}, \end{cases}$$

с краевыми условиями $\left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{r=l}=\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=l}=0$ на отрезке $l = 1$.

Для каждого варианта

а) определите, какая переменная является активатором, а какая — ингибитором, какие при этом условия накладываются на параметры точечной системы;

б) выпишите условия, при которых одновременно точечная система является устойчивой, а соответствующая распределенная система — неустойчивой;

в) рассчитайте критическое соотношение коэффициентов диффузии, при котором в системе может возникнуть диффузионная неустойчивость;

г) рассчитайте соответствующее количество диссипативных структур, которые могут возникнуть на заданном отрезке $l = 1$.